

1. POVRŠINA (KVADRATURA) POLIGONA

1. 12 dm^2 .
2. 192 cm^2 .
3. $2,5 \text{ cm}$ i 6 cm ili $7,5 \text{ cm}$ i 2 cm .
4. 2 cm^2 .
5. $P_1 = a^2 (3 - 2\sqrt{2})$
 $P_2 = 2a^2 (3 - 2\sqrt{2})$, gde je a kateta jednakokrakog pravouglog trougla tj. $P_2 = 2P_1$.
6. Ugao između visina jednak je oštrom uglu paralelograma (uglovi sa normalnim krakima), tražena površina $P = 12 \text{ cm}^2$.
7. 48 cm^2 .
8. 30 m .
9. 20 cm^2 .
10. 10 cm .
11. 336 cm^2 .
12. 8316 cm^2 .
13. 204 cm^2 .
14. $78,75 \text{ cm}^2$.
15. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
16. 42 cm^2 i 56 cm^2 .
17. 18 cm^2 .
18. 300 cm^2 .
19. 32 cm^2 .
20. 5 cm , 12 cm i 30 cm^2 .
21. 48 cm^2 .

22. Neka je T težište ABC , CN i BM odstojanja temena B i C od medijane m , koja polazi iz temena A . Lako se pokazuje da je $CN = BM$ pa je

$$P_{ABC} = \frac{m \cdot CN}{2} + \frac{m \cdot BM}{2} = m \cdot BM$$

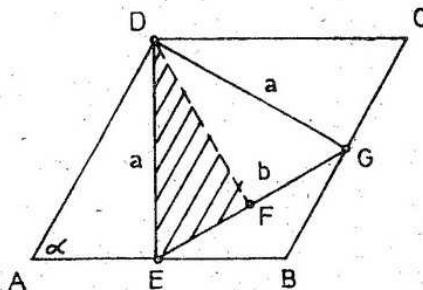
$$P_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m \cdot MB = \frac{1}{3} m \cdot MB$$

ili

$$P_{ABT} = \frac{1}{3} P_{ABC}.$$

23. Analogno prethodnom zadatku, lako se dolazi do tvrđenja.
24. Označi krak sa x i primeni obrasce $P = sr$ i
 $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Tražena površina
 $P = 540 \text{ cm}^2$.
25. Iskoristiti osobine tangenčnih duži i uputstvo prethodnog zadatka
 13 cm , 15 cm , 84 cm^2 .
26. 1 cm centar upisane kružnice.
27. $R = 12,5 \text{ cm}$, $r = 3 \text{ cm}$.
28. Trougao čije su stranice dve date stranice, a treća dvostruka težišna linija ima jednaku površinu sa trouglom čija se površina traži. Dokazati. Tražena površina je 270 cm^2 .
29. 6 cm , 8 cm , 10 cm .
30. Površina romba je $P = x^2 \sin \alpha$,
 gde su x i α povezani
 relacijom $x = \frac{a}{\sin \alpha}$.
 Iz trougla DEF (sl. 1)

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2a}$$



Slika 1

$$\text{Kako je } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \text{ i } \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

dobijamo

$$P = \frac{a^2}{\sin \alpha} = \frac{a^3}{b \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}} = \frac{2a^4}{b \sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

31. Označi stranice sa $n-1$, n i $n+1$, zatim primeni Heronov obrazac.

Stranice su 5 cm , 6 cm i 7 cm .

32. Lako se pokazuje da je zbir površina trouglova AOB i CDO jednak polovini površine paralelograma odakle sledi tvrđenje.

$$33. a = 20 \text{ cm}, b = 5,6 \text{ cm}, P = 122,88 \text{ cm}^2.$$

$$34. 288\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$35. \text{ Iz datih uslova imamo } 2a = p, d_1 + d_2 = m.$$

$$\text{Kako je } d_1 \cdot d_2 = 2P, d_1^2 + d_2^2 = 4a^2 = p^2,$$

$$\text{iz } m^2 = (d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2, \text{ dobijamo } m^2 - p^2 = 4P$$

$$P = \frac{m^2 - p^2}{4}.$$

(Da bi zadatak imao rešenje, mora biti $m > p$.)

36. Neka je AB tetiva kružnice, O centar kružnice. Površina manjeg trougla ABC $P_1 = \frac{r^2 \sin \alpha}{2}$. Površina većeg trougla ABC

$$P_2 = \frac{r^2 \sin \alpha}{2} + 2 \cdot \frac{r^2 \sin \left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \frac{2r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2} + r^2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + r^2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

$$37. P = 2r^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha.$$

38. Iz pravouglog trougla ABO gde je O presek dijagonala, imamo

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2a} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}},$$

odakle izlazi da je $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Dakle, uglovi romba su 30° i 150° .

39. 8 cm, ili 4 cm.

40. Primenom obrazaca: $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} = rs$
imamo

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2P}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2P}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2P}, \quad \text{ili}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2P} = \frac{2s}{2P} = \frac{r}{rs} = \frac{1}{r}.$$

41. Kako je $P = \frac{1}{2}ah_a$, $P = \frac{1}{2}bh_b$, $P = \frac{1}{2}ch_c$, tada je

$$P^3 = \frac{1}{8}abc \cdot h_a h_b h_c \Rightarrow P = \frac{\sqrt[3]{abch_a h_b h_c}}{2}.$$

42. Primenom obrazaca $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} = \frac{abc}{4R}$, izlazi tvrđenje.

43. Neka je CC_1 težišna linija $\triangle ABC$, tačka D centralno simetrična sa težištem T trougla u odnosu na C_1 tada je četvorougao $ATBD$ paralelogram, pa je $P_{ABC} = P_{ATD}$.

Na osnovu zadatka 22 imamo $P_{ABC} = 3P_{ABT} = 3P_{ATD} =$

$$= 3 \sqrt{\frac{2}{3}m \left(\frac{2}{3}m - \frac{2}{3}m_a \right) \left(\frac{2}{3}m - \frac{2}{3}m_b \right) \left(\frac{2}{3}m - \frac{2}{3}m_c \right)} =$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}.$$

44. 72 cm^2 .

45. 225 cm^2 .

46. 600 cm^2 .

47. $10(\sqrt{3} \pm 1) \text{ cm}$.

48. Trouglovi AED i EBD imaju jednake površine, jer imaju jednake osnove i visine. Trouglovi DFB i FCB imaju takođe jednake površine, odakle izlazi tvrđenje.

49. 48 cm^2 .

50. Neka su m i n odseci koje čini dodirna tačka upisane kružnice na hipotenuzi, a r poluprečnik kružnice, tada su katete $m+r$, $n+r$, a površina trougla $P = r(m+n+r)$. Primenom Pitagorine teoreme $(m+r)^2 + (n+r)^2 = (m+n)^2$ imamo $r(m+n+r) = mn$, odakle izlazi da je $P = mn$.

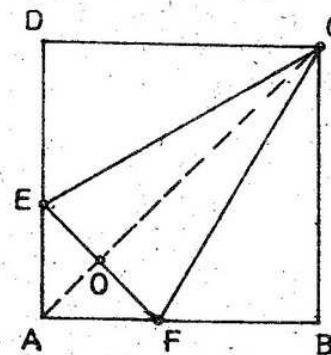
51. $P = 2(a^2 + b^2 + ab)$.

52. Na osnovu osobine tangentnog četvorougla krak

$$c = \frac{a+b}{2}, \text{ pa je } 2r = h = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

53. Dijagonala kvadrata $d = a\sqrt{2}$ (sl. 2). U trouglu ABD srednja linija

$$EF = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Slika 2

U jednakokrakom trouglu AOE stranica

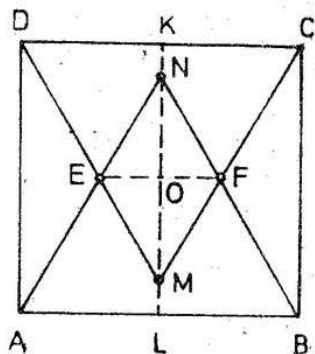
$$AO = OE = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \text{ zato je}$$

$$OC = d - OA = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Tražena površina

$$P = \frac{1}{2}EF \cdot OC = \frac{3}{8}a^2.$$

54. Traženi četvorougao je romb, čiji su uglovi 60° i 120° (sl. 3). Visina trougla DMC , $MK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, odsečak



Slika 3

$ML = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Veća dijagonala romba

$MN = LK - 2ML = a(\sqrt{3} - 1)$. Trougao EMF je jednakostraničan, pošto je $EM = MF = EF$.

Iz pravouglog trougla EOM imamo $EM^2 - OE^2 = OM^2$, pošto je $OE = \frac{EM}{2}$

$$OM = \frac{MN}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1),$$

pa je

$$EM^2 - \frac{EM^2}{4} = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3} - 1)^2,$$

odakle izlazi da je stranica romba

$$EM = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{3}.$$

Kako je strana romba jednaka manjoj dijagonali, tražena površina je

$$P = \frac{1}{2}EF \cdot MN = \frac{1}{2}EM \cdot MN = \frac{a^2}{3}(2\sqrt{3} - 3).$$

55. $P = \frac{(a-b)^2}{2}.$

56. Neka je stranica kvadrata a , a dimenzije pravougaonika x i y , na osnovu pretpostavke imamo sistem

$$\begin{cases} xy = \frac{3}{4}a^2 \\ 2x + 2y = 4a. \end{cases}$$

Iz sistema lako se dobije jednačina

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0$$

ili

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\frac{x}{y} + 3 = 0,$$

odakle izlazi da je $x : y = 3 : 1$.

57. Dijagonala koja leži naspram datog ugla α deli četvorougao na dva trougla. Površinu četvorougla izraziti kao zbir ovih trouglova.

58. Imamo $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos(180^\circ - \varphi),$

$$b^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos \varphi,$$

ili

$$a^2 - b^2 = d_1 \cdot d_2 \cos \varphi.$$

S druge strane površina paralelograma

$$P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin \varphi,$$

odakle izlazi da je

$$P = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \operatorname{tg} \varphi.$$

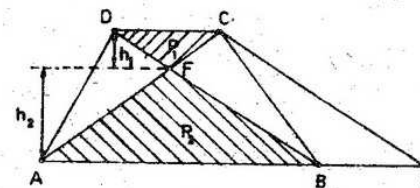
59. Neka je tačka O presek dijagonala trapeza $ABCD$ a MN visina trapeza konstruisana kroz tačku O . Trouglovi MBO i CNO su jednakokrako pravougli, pa je

$$MN = OM + ON = MB + CD = m.$$

Tražena površina je

$$P = m^2.$$

60. Konstruišimo $CE \parallel DB$ (sl. 4) i označimo visine trouglova CDF i ABF sa h_1 i h_2 . Očigledno tražena površina P jednaka je površini trougla ACE . Zato je iz sličnosti trouglova CDF i ACE



Slika 4

$$(1) \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}.$$

Takođe iz sličnosti trouglova ABF i AEC imamo

$$(2) \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{h_2}{h_1 + h_2}.$$

Iz (1) i (2) imamo

$$\frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{h_1 + h_2}{h_1 + h_2} = 1.$$

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} = \sqrt{P}$$

odakle

$$P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2.$$

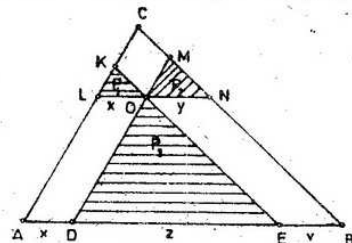
61. Neka je tražena površina P , a odsečki $AD = x$, $BE = y$ i $DE = z$ (sl. 5). Pošto je svaki dobijeni trougao sličan sa datim, imamo sledeće tri jednakosti:

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{x}{x+y+z}, \quad \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{y}{x+y+z}, \quad \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{z}{x+y+z}$$

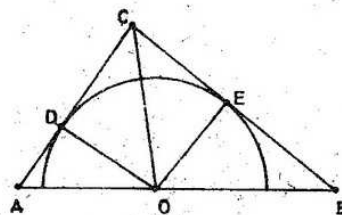
odakle izlazi

$$\frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1,$$

ili $\sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}$, tj. $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3})^2$.



Slika 5



Slika 6

62. Pošto su poznate sve tri stranice trougla, po Heronovom obrascu nalazimo površinu P trougla. Spajanjem temena C sa centrom O upisane polukružnice (sl. 6), površinu trougla možemo izračunati kao zbir površina AOC i OBC tj.

$$P = \frac{1}{2} AC \cdot OD + \frac{1}{2} BC \cdot OE = \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} ar = \frac{r}{2} (a + b) \quad \text{odakle je}$$

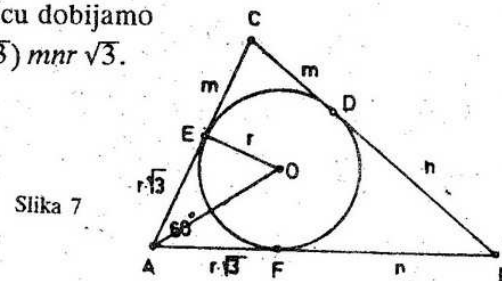
$$2r = \frac{4P}{a + b}.$$

63. Neka je poluprečnik kružnice r (sl. 7). U trouglu AOE hipotenuza $AO = 2r$, pošto je $EAO = 30^\circ$ to $AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = r\sqrt{3} = AF$. Kako je $EC = m$ i $BF = n$, primenom obrasca $P = sr$ imamo

$$(1) \quad P = (m + n + r\sqrt{3})r,$$

a po Heronovom obrascu dobijamo

$$(2) \quad P = (m + n + r\sqrt{3})mn\sqrt{3}.$$



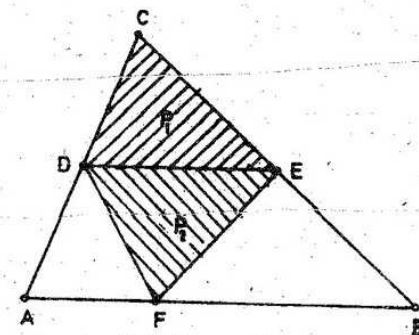
Slika 7

Iz (1) i (2) imamo

$$(m + n + r\sqrt{3})^2 r^2 = (m + n + r\sqrt{3})mn\sqrt{3},$$

ili

$$(m + n + r\sqrt{3})r = mn\sqrt{3};$$



Slika 8

dakle, $P = mn\sqrt{3}$.

64. Neka je tražena površina Q , a visine trouglova DCE i ADF , konstruisane iz temena C i D , h_1 i h_2 (sl. 8), tada je

$$Q = P_1 + P_2, \quad \text{gde je}$$

$$P_2 = P_{DEF}.$$

Kako je DE zajednička osnovica trouglova DEC i DEF tada je

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{h_2}{h_1} \quad \text{ili} \quad \frac{P_2}{P_1} + 1 = \frac{h_2}{h_1} + 1.$$

$$\text{Odatle } \frac{P_2 + P_1}{P_1} = \frac{h_2 + h_1}{h_1} \text{ tj. } \frac{Q}{P_1} = \frac{h_2 + h_1}{h_1}. \quad (1)$$

Pošto je $\triangle DCE \sim \triangle ABC$ to je

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}. \quad (2)$$

Množenjem (1) i (2) imamo

$$\frac{Q}{P_1} \cdot \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{h_2 + h_1}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_2 + h_1} = 1$$

ili

$$\frac{Q}{\sqrt{PP_1}} = 1 \Rightarrow Q = \sqrt{PP_1}.$$

65. Neka je $CM = x$, a visine trouglova ABE i CME su h_1 i h_2 . Po pretpostavci

$$\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}\frac{a+b}{2}(h_1 + h_2).$$

$$\frac{2a}{a+b} = \frac{h_1 + h_2}{h_1} = 1 + \frac{h_2}{h_1}.$$

Iz sličnosti trouglova ABE i CME imamo

$$\frac{x}{a} = \frac{h_2}{h_1}, \text{ odakle } \frac{2a}{a+b} = 1 + \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cdot \frac{a-b}{a+b}.$$

66. Neka je T težište trouglova ABC , po pretpostavci

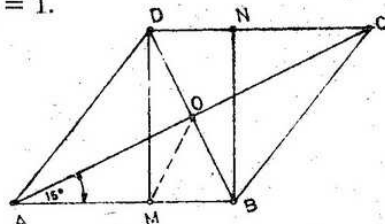
$$\angle ATC = 120^\circ, AT = \frac{2}{3}m_a, CT = \frac{2}{3}m_c,$$

pa je

$$P_{ATC} = \frac{1}{2}AT \cdot CT \cdot \sin 120^\circ = \frac{2}{9}m_a m_c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{9}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

Na osnovu zadatka 22 imamo

$$P_{ABC} = 3P_{ATC} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$



Slika 9

67. Neka je $ABCD$ dati romb (sl. 9) u kome je upisan pravougaonik $MBND$.

U trouglu AOB

$$\angle AOB = 90^\circ, \angle BAO = 15^\circ,$$

$$BO = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 15^\circ, \angle ABO = 75^\circ.$$

U trouglu MOB $MO = OB$, kao polovine dijagonala pravougao- nika, $\angle ABO = \angle OMB = 75^\circ$, pa je $\angle BOM = 30^\circ$.

Površina $MBND$

$$P = \frac{1}{2}BD \cdot MN, \text{ gde je } BD = MN = a \operatorname{tg} 15^\circ,$$

pa je

$$P = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg}^2 15^\circ.$$

Kako je

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} \frac{30^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}$$

$$P = \frac{a^2}{4} (2 - \sqrt{3})^2 = \left(\frac{a(2 - \sqrt{3})}{2} \right)^2.$$

68. Primenom kosinusne teoreme

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$\text{pošto je } P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2P}{bc} = \frac{4}{5}$$

to

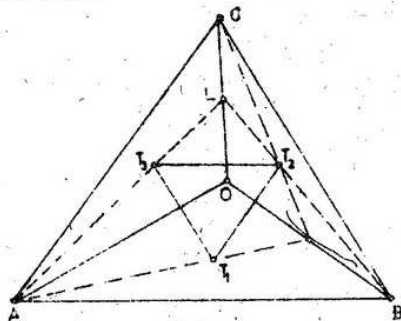
$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5},$$

pa je

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - \frac{6}{5}bc} \text{ ili } a = \sqrt{b^2 + c^2 + \frac{6}{5}bc}.$$

Oba rešenja zadovoljavaju postavljeni uslov, u prvom slučaju ugao α je oštar, a u drugom tup.

69. Kako je $T_3L = \frac{1}{3}AL$ i $T_2L = \frac{1}{3}BL$ (osobine težišnih linija) to je i $T_2T_3 = \frac{1}{3}AB$ (Talesova teorema). Analogno $T_1T_2 = \frac{1}{3}AC$; $T_1T_3 = \frac{1}{3}BC$ (sl. 10). Dakle stranice trougla $T_1T_2T_3$ su $\frac{1}{3}$ stranica trougla ABC . Primenom



Slika 10

Heronovog obrasca na trougao $T_1T_2T_3$ imamo

$$\begin{aligned} P_{T_1T_2T_3} &= \sqrt{\frac{a+b+c}{6} \left(\frac{a+b+c}{6} - \frac{a}{3} \right) \left(\frac{a+b+c}{6} - \frac{b}{3} \right) \left(\frac{a+b+c}{6} - \frac{c}{3} \right)} = \\ &= \frac{1}{36} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} = \\ &= \frac{4}{36} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{9} P_{ABC}. \end{aligned}$$

70. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao, čije se dijagonale seku u tački O .

Dokazaćemo da je $AO = OC$.

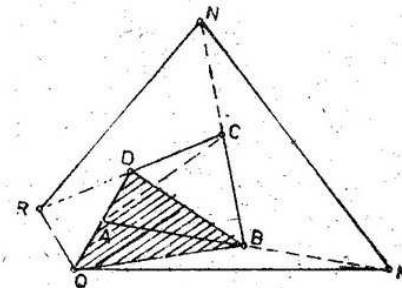
Trouglovi ABD i BCD imaju jednake površine sa zajedničkom stranom BD , odakle proizlazi da su njihove visine AK i CL prema stranici BD jednake. Iz podudarnosti pravouglih trouglova AOK i COL proizlazi jednakost $AO = OC$.

Analogno dokazujemo da je $BO = OD$.

U datom četvorouglu dijagonale se uzajamno polove tj. posmatra ni četvorougao je paralelogram.

71. U četvorouglu $ABCD$ konstruišemo dijagonalu BD (sl. 11), tada, očigledno, $P_{QBA} = P_{ABD}$ (BA – medijana).

S druge strane, $P_{QBM} = P_{QBA}$ (QB medijana), odakle proizlazi da je $P_{AQM} = 2P_{ABD}$.



Slika 11

Analogno se utvrđuje da je

$$P_{RNC} = 2P_{BCD}.$$

Konstrukcijom dijagonale AC , utvrđujemo da je

$$P_{BMN} = 2P_{ABC}, \quad P_{QRD} = 2P_{ACD}.$$

Sabiranjem dobijenih jednakosti imamo

$$P_{AQM} + P_{BMN} + P_{RCN} + P_{RDQ} = 4P_{ABCD},$$

ili

$$P_{MNRQ} = 5P_{ABCD}.$$

72. Produžimo stranice BC i AD datog četvorougla i neka se one seku u tački S i neka je ugao koji one grade φ . Ako je $AQ = QR = RD = m$ i $SD = k$, a $BM = MN = NC = n$ i $CS = l$, tada je

$$P_{ABCD} = P_{ABS} - P_{DCS} = \frac{1}{2} (l + 3k)(k + 3m) \sin \varphi - \frac{1}{2} kl \sin \varphi.$$

$$(1) \quad P_{ABCD} = \frac{3}{2} (nk + ml + 3mn) \sin \varphi,$$

$$P_{MNRQ} = P_{QMS} - P_{RNS} = \frac{1}{2} (1 + 2n)(k + 2m) \sin \varphi - \frac{1}{2} (l + n)(m + k) \sin \varphi.$$

$$(2) \quad P_{MNRQ} = \frac{1}{2} (nk + ml + 3mm) \sin \varphi.$$

$$\text{Iz (1) i (2)} \Rightarrow P_{ABCD} = 3P_{MNRQ}.$$