

$$1. \text{ Za } y=0 \Rightarrow -|x^2-2x| + \frac{1}{2} > 0 \wedge |x-1| < 2.$$

Ovaj sistem zadovoljen je za (0, 0) i (2, 0).

$$2. \text{ Za } y=1 \Rightarrow |x^2-2x| < \frac{3}{2} \wedge |x-1| < 1.$$

Ovaj sistem je zadovoljen za (1, 1).

1009. Mogućim slučajevima

$$1. \quad x+2 > 0 \wedge y-2 > 0,$$

$$2. \quad x+2 > 0 \wedge y-2 < 0,$$

$$3. \quad x+2 < 0 \wedge y-2 > 0,$$

$$4. \quad x+2 < 0 \wedge y-2 < 0,$$

odgovaraju respektivno relacije:

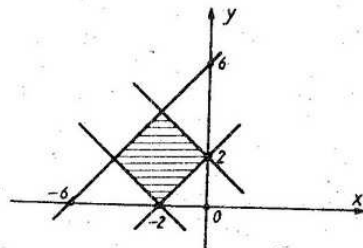
$$1. \quad -6 < x-y < -2,$$

$$2. \quad -2 < x+y < 2,$$

$$3. \quad -2 < x+y < 2,$$

$$4. \quad -6 < x-y < -2.$$

Osenčena oblast na slici 42 je rešenje nejednačine.



Slika 42

1010. leva strana nejednakosti je oblik a^b , gde je

$$a = |x+y| \geq 0, \quad b = -x+y+1.$$

Data nejednakost je ispunjena ako je

$$1. \quad a \geq 1 \wedge b \leq 0;$$

$$2. \quad a \leq 1 \wedge b \geq 0, \text{ sa izuzetkom slučaja } a = 0, b = 0.$$

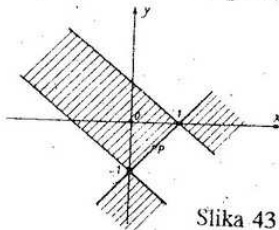
Na osnovu toga dobija se

$$1. \quad |x+y| \geq 1 \wedge -x+y+1 \leq 0;$$

$$2. \quad |x+y| \leq 1 \wedge -x+y+1 \geq 0,$$

pri čemu je isključena tačka $P\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

Skup tačaka čije koordinate zadovoljavaju uslove 1 i 2, odnosno rešenje polazne nejednakosti, prikazan je na slici 43 (šrafirana oblast).



Slika 43

VIII. GLAVA

8. MATEMATIČKA INDUKCIJA. NIZOVI

8.1. MATEMATIČKA INDUKCIJA

$$1011. \quad 1^\circ T(1) \text{ je istinito jer je } 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

2° U skupu prirodnih brojeva važi implikacija

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow$$

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Po pretpostavci je $1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Dodavši $k+1$ svakoj strani jednakosti imamo

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{1(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$= \frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

čime je dokaz završen.

1012. Za $n = 1$ tvrdjenje je tačno,

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1.$$

Dokažimo da u skupu prirodnih brojeva važi implikacija

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Ako levoj i desnoj strani pretpostavke dodamo $(k+1)^2$, dobijamo:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

čime je dokaz završen.

1013. Analogno prethodnom zadatku.

1014. Analogno 1012. zadatku.

1015. Za $n = 1$ tvrđenje je tačno,

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Dokažimo da je tačna implikacija

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1} \Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}.$$

Ako dodamo svakoj strani pretpostavke član

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \text{ imamo}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}.$$

Kraj dokaza.

1016. Za $n = 1$ tvrđenje je tačno, jer je

$$1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2 = 1.$$

Dokažimo da:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2.$$

Dodavši svakoj strani pretpostavke $(k+1)^3$, imamo

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= (k+1)^2 \frac{(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2.$$

Kraj dokaza.

1017. Analogno prethodnom zadatku.

1018. Za $n = 1$, $1 \cdot 3 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 7)}{6} = 1 \cdot 3$ tvrđenje je tačno.

Dokažimo da je tačna za svako k i implikacija.

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6} \Rightarrow$$

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + (k+1)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}.$$

Po pretpostavci je

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}.$$

Dodavši $(k+1)(k+3)$ svakoj strani jednakosti, imamo

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) + (k+1)(k+3) =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)(k+3) =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 13k + 18)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}.$$

Što znači da je identitet tačan za svako n prirodno.

1019. Za $n = 1$, $1 = 2 - 1 = 1$ tvrđenje je tačno. Dokažimo da je tačna i implikacija

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1 \Rightarrow 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Ako dodamo levoj i desnoj strani pretpostavke 2^k , imamo

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

1020. Za $n = 1$, $1 = (1-1)^0 \frac{1(1+1)}{2} = 1$ tvrđenje je tačno. Dokažimo da je tačna i implikacija.

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^k k^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Dodajmo levoj i desnoj strani pretpostavke

$$(-1)^k (k+1)^2, \text{ onda je}$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^k (k+1)^2 =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2 =$$

$$= (-1)^{k-1} (k+1) \left(\frac{k}{2} - k - 1 \right) = \frac{(-1)^{k-1} (k+1)(k+2)(-1)}{2} =$$

$$= \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)}{2}.$$

1021. 1. $T(1)$ je tačno, jer je $3^2 - 1 = 8 \equiv 0 \pmod{8}$.
 2. Za sve prirodne brojeve važi: ako je $3^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow 3^{2k+2} - 1 \equiv 0 \pmod{8}$.
 Po pretpostavci $3^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{8}$, tako da postoji prirodan broj x takav da je $3^{2k} - 1 = 8x$, ili $3^{2k} = 1 + 8x$.
 Pomnožimo obe strane ove jednakosti sa $3^2 = 9$.
 Dobijamo $3^{2k+2} = 9 + 8(9x)$ ili $3^{2k+2} = 1 + (8 + 8(9x)) = 1 + 8(1 + 9x)$.
 I tako $3^{2k+2} - 1 = 8(1 + 9x)$, ili $3^{2k+2} - 1 \equiv 0 \pmod{8}$.

1022. Označimo dati broj sa $f(n) = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ za $n = 1$.
 $f(1) = 3 \cdot 125 + 16 = 391 \equiv 0 \pmod{17}$.
 Dokažimo implikaciju $f(k) \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{17}$.
 Pošto je $f(k+1) = 3 \cdot 5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1} = 3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{2k+1} = 3 \cdot 5^{2k+1} \cdot 5^2 + 2^{3k+1} \cdot 2^3 = 25 \cdot 3 \cdot 5^{2k+1} + 8 \cdot 2^{3k+1} = 25(3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}) - 17 \cdot 2^{3k+1} = 25f(k) - 17 \cdot 2^{3k+1} \equiv 0 \pmod{17}$,
 jer je prvi član razlike deljiv sa 17 po pretpostavci, a drugi je očigledno deljiv sa 17, pa je implikacija tačna za $f(n)$ $n \in N$.

1023. Neka je $f(n) = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$,
 $f(1) = 11^3 + 12^3 = 3059 \equiv 0 \pmod{133}$.
 Dokažimo tačnost implikacije $f(k) \equiv 0 \pmod{133} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{133}$.
 Kako je $f(k+1) = 11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} + 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1} = 11f(k) + 133 \cdot 12^{2k+1} \equiv 0 \pmod{133}$,
 jer je prvi član sume deljiv sa 133 po pretpostavci, a drugi očigledno deljiv sa 133, čime je dokazana implikacija.

1024. Neka je $f(n) = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$.
 Za $n = 1$, $f(1) = 2^3 - 9 + 3 - 2 = 0 \equiv 0 \pmod{54}$.
 Dokažimo implikaciju $f(k) \equiv 0 \pmod{54} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{54}$.

Pošto je

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 2^{2k+3} - 9(k+1)^2 + 3(k+1) - 2 = \\ &= 2^{2k+1} \cdot 4 - 9k^2 - 18k - 8 = \\ &= 4(2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2) + 27k^2 - 27k = 4f(k) + 27k(k-1) = \\ &= 4f(k) + 27 \cdot 2p = 4f(k) + 54p, \text{ jer je } k(k-1) = 2p \text{ (paran broj), a } f(k+1) \equiv 0 \pmod{54}, \\ &\text{pošto je prvi sabirak deljiv sa 54 po pretpostavci, a drugi očigledno, samim tim je dokazana i implikacija.} \end{aligned}$$

1025. Neka je $f(n) = 3^{2n+2} - 8n - 9$. Ako je $n = 1$, $f(1) = 3^4 - 8 - 9 = 64 \equiv 0 \pmod{64}$.
 Dokažimo da je tačna i implikacija $f(k) \equiv 0 \pmod{64} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{64}$.
 $f(k+1) = 3^{2k+4} - 8k - 17 = 9(3^{2k+2} - 8k - 9) + 64(k+1) = 9f(k) + 64(k+1)$.
 Dakle, $f(k+1) \equiv 0 \pmod{64}$, jer je prvi član $9f(k)$ deljiv po pretpostavci sa 64, a drugi očigledno.

1026. Ako je $f(n) = 7^{n+2} + 8^{2n+1} \equiv 0 \pmod{57}$,
 $f(1) = 7^3 + 8^3 = 855 \equiv 0 \pmod{57}$. Dokažati tačnost implikacije $f(k) \equiv 0 \pmod{57} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{57}$.
 Kako je $f(k+1) = 7^{k+3} + 8^{2k+3} = 7 \cdot 7^{k+2} + 64 \cdot 8^{2k+1} = 64(7^{2k+1} + 8^{2k+1}) - 57 \cdot 7^{k+2} = 64 \cdot f(k) - 57 \cdot 7^{k+2}$,
 zaključak se izvodi jednostavno.

1027. Ako je $f(n) = 3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$, onda je $f(1) = 3^5 + 5 \cdot 2^4 = 323 \equiv 0 \pmod{19}$. Dokažimo implikaciju $f(k) \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{19}$.
 $f(k+1) = 3^{3(k+1)+2} + 5 \cdot 2^{3(k+1)+1} = 3^{3k+5} + 5 \cdot 2^{3k+4} = 27(3^{3k+2} + 5 \cdot 2^{3k+1}) - 19 \cdot 5 \cdot 2^{3k+1} = 27f(k) - 95 \cdot 2^{3k+1}$.
 Dakle $f(k+1) \equiv 0 \pmod{19}$, jer je član $27 \cdot f(k)$ deljiv sa 19 po pretpostavci, a drugi $95 \cdot 2^{3k+1}$ očigledno, pa je implikacija tačna.

1028. 1° $T(1)$ je tačno, jer je $2 \geq 1 + 1$.
 2° Za sve prirodne brojeve ako je $2^k > 1 + k \Rightarrow 2^{k+1} > 1 + (k+1)$. Po pretpostavci je $2^k > 1 + k$.
 Množenjem obe strane ove nejednakosti sa 2 dobijamo $2^{k+1} \geq 2 + 2k$.
 Pošto je $2k > k$, gde $k \in N$, imamo $2^{k+1} \geq 2 + 2k > 2 + k = 1 + (k+1)$, što je trebalo dokazati.

1029. 1° $T(-1)$ je tačno, jer je $-2 - 9 - 13 + 25 = 1 > 0$.
 2° Za sve cele brojeve $k \geq -1$, ako je
 $2k^3 - 9k^2 + 13k + 25 > 0 \Rightarrow 2(k+1)^3 - 9(k+1)^2 + 13(k+1) + 25 > 0$.
 Dokaz: za $n = k + 1$, $2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 =$
 $= 2(k+1)^3 - 9(k+1)^2 + 13(k+1) + 25 =$
 $= 2k^3 - 3k^2 + k + 31 = 2k^3 - 9k^2 + 13k + 25 + 6(k-1)^2$.
 Po pretpostavci $2k^3 - 9k^2 + 13k + 25 > 0$, a izraz $6(k-1)^2$ je očigledno pozitivan.

1030. Za $n = 2$ imamo da je $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$, jer je $h^2 > 0$.

Dokažimo implikaciju

$$(1+h)^k > 1 + kh \Rightarrow (1+h)^{k+1} > 1 + (k+1)h.$$

Pomnožimo li obe strane pretpostavke sa $1+h > 0$, dobićemo

$$(1+h)^{k+1} (1+h) = 1 + (k+1)h + nh^2 > 1 + (k+1)h,$$

tj. implikacija je tačna, čime je tvrđenje dokazano.

1031. Za $n = 5$ nejednakost je tačna. Dokažimo da je tačna implikacija

$$2^k > k^2 \Rightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2.$$

$$2^{k+1} > 2k^2 \geq k^2 + 5k, \text{ jer je } k \geq 5.$$

$$\text{Iz nejednakosti } 2^{k+1} > k^2 + 4k + k > k^2 + 2k + 1 \text{ sledi } 2^{k+1} (k+1)^2.$$

1032. Za $n = 2$ data nejednakost važi. Dokažimo da važi i implikacija

$$\sqrt{p^k} + \sqrt{q^k} \leq \sqrt{(p+q)^k} \Rightarrow \sqrt{p^{k+1}} + \sqrt{q^{k+1}} \leq \sqrt{(p+q)^{k+1}}.$$

$$\text{Pošto je } \sqrt{p^{k+1}} + \sqrt{q^{k+1}}$$

$$= \sqrt{p^k} \sqrt{p} + \sqrt{q^k} \sqrt{q} \leq \sqrt{p^k} \sqrt{p+q} + \sqrt{q^k} \sqrt{p+q} =$$

$$= (\sqrt{p^k} + \sqrt{q^k}) \cdot \sqrt{p+q} \leq \sqrt{(p+q)^k} \sqrt{p+q} = \sqrt{(p+q)^{k+1}} \text{ dokaz je završen.}$$

1033. Za $n = 1$ identitet je tačan, jer je

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \cos \frac{x}{2}.$$

Dokažimo da je tačna i implikacija

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \dots \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} \Rightarrow$$

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \dots \cos \frac{x}{2^{k+1}} = \frac{\sin x}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}}}.$$

Množenjem leve i desne strane pretpostavke sa $\cos \frac{x}{2^{k+1}}$, imamo
 $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \dots \cos \frac{x}{2^k} \cdot \cos \frac{x}{2^{k+1}} = \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} \cdot \cos \frac{x}{2^{k+1}} =$

$$\frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2^{k+1}}}{2^k \cdot 2 \sin \frac{x}{2^{k+1}} \cos \frac{x}{2^{k+1}}} = \frac{\sin x}{2^{k+1} \cdot \sin \frac{x}{2^{k+1}}},$$

što znači da je implikacija tačna, pa je tvrđenje tačno za svako n koje je prirodan broj.

1034. Za $n = 1$ imamo $\sin x = \frac{\sin^2 x}{\sin x} = \sin x$ i identitet je tačan.

Pokažimo da je tačna i implikacija

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2k-1)x = \frac{\sin kx}{\sin x}.$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2k+1)x = \frac{\sin^2 (k+1)x}{\sin x}.$$

Ako se doda levoj i desnoj strani pretpostavke $\sin (2k+1)x$, sledi da je

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2k-1)x + \sin (2k+1)x =$$

$$= \frac{\sin^2 kx}{\sin x} + \sin (2k+1)x = \frac{\sin^2 kx}{\sin x} + \sin (2k+1)x$$

$$= \frac{\sin^2 kx + \sin (2k+1)x \sin x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2 kx + \frac{1}{2} \cdot (\cos 2kx - \cos (2k+2)x)}{\sin x} =$$

$$= \frac{2 \sin^2 kx + \cos^2 kx - \sin^2 kx - \cos (2k+2)x}{2 \sin x}$$

$$= \frac{1 - \cos (2k+2)x}{2 \sin x} = \frac{2 \sin^2 (k+1)x}{2 \sin x} = \frac{\sin^2 (k+1)x}{\sin x}.$$

Dakle, implikacija je tačna, pa je identitet tačan za svako n prirodno.

1035. Analogno prethodnom zadatku.

1036. Za $n = 1$, $\sin x = \frac{\sin x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$, identitet je tačan.

Dokažimo da je tačna i implikacija

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin kx = \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \sin \frac{kx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \Rightarrow$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin (k+1)x = \frac{\sin \frac{k+2}{2}x \sin \frac{(k+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Ako se doda levoj i desnoj strani pretpostavke $\sin (k+1)x$, dobija se

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin kx + \sin (k+1)x &= \\ &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \sin \frac{kx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \sin (k+1)x = \\ &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \sin \frac{kx}{2} + 2 \sin \frac{k+1}{2}x \cos \frac{k+1}{2}x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \left(\sin \frac{kx}{2} + 2 \cos \frac{k+1}{2}x \cdot \sin \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \left(\sin \frac{kx}{2} + \sin \frac{k+2}{2}x - \sin \frac{kx}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{k+2}{2}x \sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Implikacija je tačna.

1037. Analogno prethodnom zadatku.

1038. Za $n = 1$ imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 2 \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{2}{\operatorname{tg} 2x} = \\ \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{2}{\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \\ = \operatorname{tg} x + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \end{aligned}$$

Tvrđenje je tačno.

Dokažimo implikaciju

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 2 \operatorname{ctg} 2x \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{ctg} 2^{k+1}x - 2 \operatorname{ctg} 2x.$$

Dodajmo levoj i desnoj strani pretpostavke $\frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}}$.

Tada je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}} &= \\ = \frac{1}{2^k} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^k} - \operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}} &= \\ = \frac{1}{2^{k+1}} \left(2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2^k} + \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}} \right) - 2 \operatorname{ctg} 2x &= \\ = \frac{1}{2^{k+1}} \left(\operatorname{ctg} \frac{2x}{2^{k+1}} + \left(\operatorname{ctg} \frac{2x}{2^{k+1}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}} \right) \right) - 2 \operatorname{ctg} 2x &= \\ = \frac{1}{2^{k+1}} \left(\operatorname{ctg} \frac{2x}{2^{k+1}} + \frac{\cos \left(\frac{2x}{2^{k+1}} - \frac{x}{2^{k+1}} \right)}{\sin \frac{2x}{2^{k+1}} \cos \frac{x}{2^{k+1}}} \right) - 2 \operatorname{ctg} 2x &= \\ = \frac{1}{2^{k+1}} \left(\operatorname{ctg} \frac{2x}{2^{k+1}} + \frac{1}{\sin \frac{2x}{2^{k+1}}} \right) - 2 \operatorname{ctg} 2x &= \\ = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{\cos \frac{2x}{2^{k+1}} + 1}{\sin \frac{2x}{2^{k+1}}} - 2 \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{k+1}} - 2 \operatorname{ctg} 2x, \end{aligned}$$

čime je tvrđenje dokazano.

1039. Za $n = 1$ imamo $\cos x + i \sin x = \cos x + i \sin x$, formula je tačna.

Dokažimo tačnost implikacije $(\cos x + i \sin x)^k = \cos kx + i \sin kx \Rightarrow$
 $(\cos x + i \sin x)^{k+1} = \cos (k+1)x + i \sin (k+1)x.$

Ako pomnožimo obe strane pretpostavke sa $\cos x + i \sin x$, imamo

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^{k+1} &= (\cos kx + i \sin kx) (\cos x + i \sin x) = \\ &= \cos kx \cos x + i \sin kx \cos x + \sin x \cos kx + i \sin kx \sin x = \\ &= \cos kx \cos x - \sin kx \sin x + i \sin kx \cos x + \sin x \cos kx = \\ &= \cos (kx + x) + i \sin (kx + x) = \cos (k+1)x + i \sin (k+1)x. \end{aligned}$$

Implikacija je tačna, pa je i Moavrova formula tačna za svako n prirodno.

1040. Za $n = 1$,

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{1-x^4} = \frac{-(1-x)(1+x^2)+4}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} =$$

$$= \frac{-(x-1)(x^2+2x+3)}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{x^2+2x+3}{(1+x)(1+x^2)},$$

tvrdjenje je tačno. Dokažimo da je tačna implikacija

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \dots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

Ako dodamo levoj i desnoj strani pretpostavke $\frac{2^{k+2}}{1+x^{2^{k+1}}}$, dobija se

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^k}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+2}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2 \cdot 2^{k+1}}{1-x^{2 \cdot 2^{k+1}}} =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}},$$

što je trebalo dokazati.

1041. Za $n = 1$,

$$a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5 = 2^2 + 1, \text{ i tvrdjenje je tačno.}$$

Dokažimo implikaciju

$$a_k = 2^k + 1 \Rightarrow a_{k+1} = 2^{k+1} + 1. \text{ Kako je}$$

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 3(2^k + 1) - (2^{k-1} + 1) =$$

$$= 3 \cdot 2^k + 3 - 2^k - 2 = 2 \cdot 2^k + 1 = 2^{k+1} + 1.$$

Implikacija je tačna.

1042. Analogno prethodnom zadatku.

1043. Za $n = 1$,

$$\frac{a_1 - \sqrt{b}}{a_1 + \sqrt{b}} = \frac{\frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{a} \right) - \sqrt{b}}{\frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{a} \right) + \sqrt{b}} = \frac{a^2 - 2a\sqrt{b} + b}{a^2 + 2a\sqrt{b} + b} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^2,$$

tvrdjenje je tačno. Dokažimo implikaciju

$$\frac{a_k - \sqrt{b}}{a_k + \sqrt{b}} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^k} \Rightarrow \frac{a_{k+1} - \sqrt{b}}{a_{k+1} + \sqrt{b}} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^{k+1}}$$

Kako je

$$\frac{a_{k+1} - \sqrt{b}}{a_{k+1} + \sqrt{b}} = \frac{\frac{1}{2} \left(a_k + \frac{b}{a_k} \right) - \sqrt{b}}{\frac{1}{2} \left(a_k + \frac{b}{a_k} \right) + \sqrt{b}} = \frac{a_k^2 - 2a_k\sqrt{b} + b}{a_k^2 + 2a_k\sqrt{b} + b} = \left(\frac{a_k - \sqrt{b}}{a_k + \sqrt{b}} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(a - \sqrt{b})^{2^k}}{a + \sqrt{b}} \right)^2 = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2 \cdot 2^k} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^{k+1}}$$

Implikacija je tačna.

1044. Iz rekurentnog obrasca imamo

$$a_3 = (\alpha + \beta) a_2 - \alpha \beta a_1 =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^3 - \beta^3)}{\alpha - \beta} - \alpha \beta (\alpha + \beta) = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}.$$

Pretpostavimo da je za neku vrednost $n = k$, a i za sve manje vrednosti od k , tačan odnos

$$a_k = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta}.$$

Dokažimo da je ovaj obrazac tačan i za a_{k+1} .

Stvarno:

$$a_{k+1} = (\alpha + \beta) a_k - \alpha \beta a_{k-1} =$$

$$= (\alpha + \beta) \cdot \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta} - \alpha \beta \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - \alpha \beta (\alpha^k - \beta^k)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{k+2} + \beta^{k+2}}{\alpha - \beta},$$

dakle, matematičkom indukcijom smo utvrdili da je opšti član niza

$$a_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

1045. Za $n = 2$, $2^{2^2} = 2^4 = 16$, tvrdjenje je tačno.

Dokažimo da je tačna i implikacija

$$(2^{2^k} - \text{poslednja cifra } 6) \Rightarrow (2^{2^{k+1}} - \text{poslednja cifra } 6).$$

Kako je $2^{2^{k+1}} = 2^{2^k \cdot 2} = (2^{2^k})^2$, ovaj broj završava sa 6 jer broj koji završava sa 6 i njegov kvadrat imaju tu osobinu.

1046. Za $n = 1, f(1) = 3^2 - 1 = 8 \equiv 0 \pmod{2^{1+2}}$.

Dokažimo implikaciju

$$f(k) \equiv 0 \pmod{2^{k+2}} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{2^{k+3}}.$$

Kako je

$$f(k+1) = 3^{2^{k+1}} - 1 = 3^{2^k \cdot 2} - 1 = (3^{2^k})^2 - 1 = (3^{2^k} - 1)(3^{2^k} + 1),$$

$f(k+1) \equiv 0 \pmod{2^{k+3}}$, jer je $3^{2^k} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{k+2}}$ po pretpostavci, a $3^{2^k} + 1 \equiv 0 \pmod{2}$.

s obzirom da je $3^{2^k} + 1$ uvek paran broj, čime je dokazana tačnost implikacije.

$f(k)$ nije deljivo sa 2^{n+3} , jer nije tačna induktivna hipoteza.

1047. Za $n = 1, f(1) = 2^3 + 1 = 9 \equiv 0 \pmod{3^{1+1}}$.

Dokažimo da je

$$f(k) \equiv 0 \pmod{3^{k+1}} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{3^{k+2}}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 2^{3^{k+1}} + 1 = 2^{3^k \cdot 3} + 1 = (2^{3^k})^3 + 1 = \\ &= (2^{3^k} + 1)^3 - 3(2^{3^k})^2 - 3 \cdot 2^{3^k} = (2^{3^k} + 1)^3 - 3 \cdot 2^{3^k}(2^{3^k} + 1), \end{aligned}$$

$f(k+1) \equiv 0 \pmod{3^{k+2}}$, jer je

$f(k+1) \equiv 0 \pmod{3^{k+2}}$, a $(2^{3^k} + 1)^3 = f(k)f^2(k)$, a to je deljivo sa 3^{k+2} , drugi član razlike se može napisati u obliku $3 \cdot 2^{3^k}$, $f(k)$ a to je deljivo sa 3^{k+2} .

1062. Za $n = 2, \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, tvrđenje je tačno.

Neka je

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k},$$

$$\text{tada je } \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1}}{k+1} =$$

$$k \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{k} + a_{k+1} \geq \frac{k \cdot \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k} + a_{k+1}}{k+1}$$

Ako se uvedu smene

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k = x^{k(k+1)}, a_{k+1} = y^{k+1}, \text{ tada je}$$

$$\begin{aligned} & \frac{k \cdot \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k} + a_{k+1}}{k+1} - \sqrt[k+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{k+1}} = \\ & \frac{kx^{k+1} + y^{k+1}}{k+1} - x^k y = \frac{kx^{k+1} + y^{k+1} - kx^k y - yx^k}{k+1} = \\ & = \frac{kx^k(x-y) - y(x^k - y^k)}{k+1} = \frac{(x-y)(kx^k - yx^{k-1} - y^2x^{k-2} \dots y^k)}{k+1} = \\ & = \frac{(x-y)(x^k - yx^{k-1} + x^k y^{k-2} + \dots + x^k - y^k)}{k+1} = \\ & = \frac{(x-y)^2(x^{k-1} + x^{k-2}(x+y) + x^{k-3}(x^2 + xy + y^2) + \dots + (x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1}))}{k+1} > 0, \end{aligned}$$

što znači da je $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n}$.

Znak jednakosti važi ako je $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$.

1063. Za $n = 2, \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$.

Pretpostavimo da je, za $n = k$,

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}.$$

Dokažimo da je

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24}.$$

Neka je

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}, \text{ a}$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2(k+1)}. \text{ Razlika}$$

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > 0,$$

$$S_{k+1} - S_k > 0 \Rightarrow S_{k+1} > S_k \Rightarrow S_{k+1} > \frac{13}{24}.$$

1064. Za $n = 2$,

$$2(a^2 + b^2) > (a+b)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} > \sqrt{a^2 b^2},$$

tvrđenje je tačno.

Pretpostavimo da je

$$(1) \quad 2^{k-1} (a^k + b^k) > (a + b)^k.$$

Dokažimo da je

$$(2) \quad 2^k (a^{k+1} + b^{k+1}) > (a + b)^{k+1}.$$

Ako pomnožimo (1) sa $a + b > 0$, dobija se

$$2^{k-1} (a^k + b^k) (a + b) > (a + b)^{k+1}.$$

Da bismo dokazali (2), dovoljno je dokazati da je

$$2^k (a^{k+1} + b^{k+1}) 2^{k-1} (a^k + b^k) (a + b) \Rightarrow$$

$$2a^{k+1} + 2b^{k+1} > a^{k+1} + a^k b + ab^k + b^{k+1} \Rightarrow$$

$$a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + ab^k \Rightarrow (a^k - b^k) (a - b) > 0.$$

Ako je $a > 0$, oba činioca su pozitivna, pa je i gornji proizvod pozitivan. Ako je $a < b$ oba činioca su negativna, pa je proizvod takođe negativan. Time je dokaz završen.

1065. Za $n = 2$, $2^{2^2} - 1 = 2^4 - 1 = 15$, što je deljivo sa 15, i tvrdjenje je tačno.

Pretpostavimo da je $15 \mid 2^{2^k} - 1$, dokažimo da je $15 \mid 2^{2^{k+1}} - 1$. Kako je $2^{2^{k+1}} - 1 = (2^{2^k})^2 - 1 =$

$$= (2^{2^k} + 1) (2^{2^k} - 1),$$

s obzirom na pretpostavke, ovaj proizvod je deljiv sa 15. Time je dokaz završen.

1066. Ako u datu jednakost stavimo $n = 1$ i $n = 2$, dobijamo sistem

$$2(a+b) = 1 \wedge 6(2a+b) = 7, \text{ iz koga sledi da je}$$

$$a = \frac{2}{3} \text{ i } b = -\frac{1}{6}.$$

Prema tome, dobijamo jednakost

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n k(2k-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

Ova formula važi za $n = 1$ i $n = 2$. Primenom matematičke indukcije dobićemo da važi za svako n . Pretpostavimo da je jednakost (1) tačna. Ako levoj i desnoj strani dodamo $(n+1)(2n+1)$ imamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(2k-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} + (n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{(n+1)}{6} (4n^2 - 11n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(4n+3)}{6}.$$

1067. Analogno prethodnom zadatku $A = -1$, $B = -2$, $C = 2$.

$$1068. \text{ a) } a_n = \frac{n+2}{n+1}, \quad \text{ b) } a_n = \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\text{ c) } a_n = a^n - 1; \quad \text{ d) } a_n = (-1)^{n-1}; \quad \text{ c) } a_n = \frac{n}{n!}.$$

Rešenje ovog zadatka nije jednoznačno, opšti član pod a) može biti, na primer,

$$a_n = \frac{n+2}{n+1} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \sin^2 n.$$

1069. Niz je monotono rastući ako je $a_n < a_{n+1}$ ili

$$a_n - a_{n+1} < 0. \text{ Za dati niz imamo}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n}{3n+1} - \frac{3n+3}{3n+4} = \frac{-3}{(3n+1)(3n+4)} < 0,$$

što znači da je dati niz monotono rastući.

1070. Niz je monotono opadajući ako je $a_n > a_{n+1}$ ili

$$a_n - a_{n+1} > 0. \text{ Za dati niz imamo}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{4n^2-1} > 0.$$

Dati niz je opadajući.

1074. $a_1 = 2$; $a_2 = a_1 + 1$; $a_3 = a_1 + 1 + 2$; $a_4 = a_1 + 1 + 2 + 3$; $a_5 = a_1 + 1 + 2 + 3 + 4$; $a_6 = a_1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Naslućujemo da je $a_n = a_1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$, što se indukcijom može dokazati.

1075. Uslov $a_n > 50$ je ispunjen za $n > 7$, tj. članovi $a_8, a_9, \dots$

$$1076. \text{ Opšti član niza } (b_n) \text{ je } b_n = \frac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{n+1}{3n};$$

$$b_1 = \frac{2}{3}, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{4}{9}, b_4 = \frac{5}{12}, b_5 = \frac{6}{15}, b_6 = \frac{7}{18}.$$

$$1077. a_{25} = \frac{25 \cdot 26}{2}, a_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2},$$

$$a_{n-3} = \frac{(n-3)(n-2)}{2}, a_{n+2} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}.$$

1078. $a_1 = 5, a_2 = 5, a_3 = 5, a_4 = 5, a_5 = 5$. Takođe je

$a_{100} = 5, a_{n-3} = 5, a_{n+1} = 5$. Svi članovi ovog niza su 5. Za ovakav niz kaže se da je konstantan.

1079. $a_1 = 2 = 3 \cdot 1 - 1, a_2 = 5 = 3 \cdot 2 - 1, a_3 = 8 = 3 \cdot 3 - 1,$

$a_4 = 11 = 3 \cdot 4 - 1, a_5 = 14 = 3 \cdot 5 - 1, a_6 = 17 = 3 \cdot 6 - 1.$

Na osnovu ovoga naslućujemo da će opšti član datog niza biti $a_n = 3n - 1.$

1080. a) $1, \frac{7}{4}, \frac{13}{8}, \frac{7}{5}, \frac{19}{12}, \frac{10}{12}, \frac{10}{7}, \frac{25}{16}, \frac{13}{9}, \frac{31}{20},$

b) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{10},$

c) $2, 0, -\frac{4}{3}, 0, \frac{6}{5}, 0, -\frac{8}{7}, 0, \frac{10}{9}, 0.$

1081. a) $-5, 0, 5, 10, 15, 20;$ b) $2, -2, 2, -2, 2, -2.$

1085. Ako je $a_n = r^n$, tada rekurentna formula postaje

$r^{n+1} = 3r^n - 2r^{n-1} \Leftrightarrow r^2 - 3r + 2 = 0.$

To je $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 (1)^n.$

Za $n = 0$, odnosno $n = 1$, dobijemo

$C_1 + C_2 = 2 \wedge 2C_1 + C_2 = 3 \Leftrightarrow C_1 = 1, C_2 = 1.$

Opšti član niza je $a_n = 2^n + 1^n = 2^n + 1.$

b) $a_n = 2^n - 1.$

1086. Dovoljno je posmatrati sledeća četiri slučaja:

1) $a \leq 2a_1 \leq a;$ 2) $0 \leq a_1 \leq a_0 \leq 2a_1;$

3) $0 \leq a_1 \leq 2a_0;$ 4) $0 < 2a_0 \leq a_1.$

Neka je $a_0 = 0$ i $a_1 = b.$

$a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10}$

1) $a, b, b-a, a-2b, 2a-3b, a-b, 2b-a, -b, a-b, a, b,$

2) $a, b, b-a, a-2b, b, 3b-a, 2b-a, -b, a-b, a, b,$

3) $a, b, b-a, -a, 2b-a, 3a-b, a, b-2a, a-b, a, b,$

4) $a, b, b-a, -a, 2a-b, b-a, 2b-3a, b-2a, a-b, a, b.$

Oдавде zaključujemo da je dati niz periodičan sa periodom 9, $a_{n+9} = a_n$ za svako $n.$

1087. Pošto je $x_3 = 6 = 3!, x_4 = 24 = 4!$ i $x_5 = 120 = 5!,$

može se naslutiti da je $x_n = n!.$

Dokaz indukcijom $x_1 = 1!, x_2 = 2!.$

Pretpostavimo da je $x_k = k!$ i $x_{k-1} = (k-1)!$

Tada je

$x_{k+1} = k(x_k + x_{k-1}) = k(k! + (k-1)!) =$

$k(k-1)!(k+1) = (k+1)!,$ čime je dokaz završen.

1088. a) Za $n = 1, a_1 + (1-1)d = a_1,$ jednakost je tačna. Pretpostavimo da je obrazac tačan za $n=k, a_k = a_1 + (k-1)d,$ pa dokažemo da je tačan i za $n=k+1.$ Treba dokazati da je

$a_{k+1} = a_1 + ((k+1)-1)d = a_1 + kd.$

Dokaz:

$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd.$

Prema tome obrazac je tačan za svako n (prirodan broj).

b) Za $n = 1, S_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1,$ zbir od jednog člana jednak je samom članu. Pretpostavimo da je obrazac tačan za $n = k,$

$S_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k).$

Treba dokazati da važi za $n = k+1,$ odnosno da je

$S_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1}).$

Dokaz:

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) + a_{k+1} =$

$= \frac{k}{2}(a_1 + a_1(k-1)d) + a_{k+1} = \frac{k}{2}(2a_1 + kd) - \frac{kd}{2} + a_1 + kd =$

$= \frac{k}{2}(2a_1 + kd) + \frac{2a_1 + kd}{2} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2}(2a_1 + kd) =$

$= \frac{k+1}{2}(a_1 + (a_1 + kd)) = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1}).$

Obrazac je tačan za svako n (prirodan broj).

1089. $a_{13} = -50.$

1090. $7, 8\frac{1}{2}, 10, 11\frac{1}{2}, \dots$

1091. a) $a_n = 45, d = 3;$

b) $a_n = -16, d = -4.$

1092. a) $a_1 = 9, d = 2;$

b) $a_1 = 0, d = 7.$

1093. a) $n = 10, S_n = 265;$

b) $n = 26, S_n = 604,5.$

1094. a) $n = 52, a_n = 143;$

b) $n = 10, a_n = 47.$

1095. a) $8, 5, 2, -1, -4, \dots;$

b) $\frac{73}{11}, \frac{52}{11}, \frac{31}{11}, \frac{10}{11}, \dots$

1096. Iz sistema jednačina $a_1 = 9 \wedge a_9 = -6$ dobija se

$a = 18, d = -3.$ Ako se zamene dobijene vrednosti u (3), proizilazi da je $n = 4$ ili $n = 9.$

1097. a) $a_1 = 2, d = 1, n = 5$; b) $a_1 = 5, d = 5, n = 6$.

1098. Iz uslova zadatka dobijaju se jednakosti:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 36 \wedge a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 482.$$

Odatle sledi sistem

$$a + d = 12 \wedge 3a^2 + 5d^2 + 6ad = 482, \text{ čija su rešenja}$$

$d = \pm 5, a_1 = 7$ ili $a_1 = 17$, te je traženi niz

7, 12, 17, 22, ... ili 17, 12, 7, 2, -3, -8, ...

1099. Iz uslova $a_1 = 5, d = 4$. Zamenom ovih vrednosti u

(3) i posle sređivanja dobija se jednačina

$$2n^2 + 3n - 10877 = 0.$$

Koreni jednačina su $n_1 = 73$ i $n_2 = -74,5$. Odgovara samo n_1 , jer broj članova progresije je ceo pozitivan broj.

1100. Iz uslova sledi sistem

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 26 \wedge$$

$$\wedge a_1(a_1 + d)(a_1 + 2d)(a_1 + 3d) = 880.$$

Posle sređivanja, iz prve jednačine je $a_1 = \frac{13 - 3d}{2}$.

Zamenom u drugu jednačinu sređivanjem izraza u zagradi dobija se

$$\frac{13 - 3d}{2} \cdot \frac{13 - d}{2} \cdot \frac{13 + d}{2} \cdot \frac{13 + 3d}{2} = 880.$$

Prvi i četvrti i drugi i treći član proizvoda predstavljaju razliku kvadrata brojeva 13 i $3d$, 13 i d .

Dobija se jednačina

$$9d^4 - 1690d^2 + 14481 = 0, \text{ čija su rešenja}$$

$$d' = 3, d'' = -3, d''' = \frac{1609}{3} \text{ i } d^{IV} = -\frac{1609}{3}.$$

Iz jednačine $a = \frac{13 - 3d}{2}$ dobijaju se odgovarajuća rešenja:

$$a_1' = 2, a_1'' = 11,$$

$$a_1''' = \frac{13 - \sqrt{1609}}{2} \text{ i } a_1^{IV} = \frac{13 + \sqrt{1609}}{2}.$$

Odatle slede četiri niza:

$$1) 2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

$$2) 1, 8, 5, 3, -1, \dots$$

$$3) \frac{13 - \sqrt{1609}}{2}, \frac{39 - \sqrt{1609}}{2}, \frac{39 + \sqrt{1609}}{2}, \frac{13 + \sqrt{1609}}{2}, \dots$$

$$4) 13 + \frac{\sqrt{1609}}{2}, \frac{39 + \sqrt{1609}}{6}, \frac{39 - \sqrt{1609}}{6}, \frac{13 - \sqrt{1609}}{2}, \dots$$

$$1101. a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{4}(a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}).$$

Ako sve članove izrazimo preko a , i d , dobijamo jednačinu

$$5a_1 + 10d = \frac{1}{4}(5a_1 + 35d). \text{ Pošto je } a_1 = 1, \text{ dobija se da je}$$

$d = -3$. Traženi niz je 1, -3, -6, -9, ...

$$1102. a_1 = 1, d = 3.$$

1103. Iz uslova zadatka sledi

$$\frac{2a_1 + (m-1)d}{2} \cdot m : \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = m^2 : n^2.$$

Posle sređivanja je $(2-d)(n-m) = 0$, a odavde $n-m \neq 0$, $2-d = 0 \Rightarrow d = 2$, a traženi niz glasi 1, 3, 5, 7, 9, ...

$$1104. 2, 4, 6, 8, \dots$$

$$1105. \text{ Iz uslova sledi } \frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) = n, \frac{n}{2}(a_1 + (n-1)d) = m,$$

$$\text{ odakle dobijamo: } d = \frac{2(m+n)}{mn}, a_1 = \frac{m^2 + (n-1)(m+n)}{mn}.$$

Smenom u obrazac

$$S_{m+n} = \frac{m+n}{2}(2a_1 + (m+n-1)d) \text{ dobijamo:}$$

$$a) S_{m+n} = -(m+n);$$

$$b) \text{ analogno } S_{m-n} = \frac{(m-n)(2n+m)}{m}.$$

1106. Iz $a_1 + d(m-1) = n$, $a_1 + d(n-1) = m$ dobija se

$$d = -1, a_1 = m + n - 1, \text{ pa je } S_{m+n} = \frac{m+n}{2}(m+n-1).$$

1107. a) Iz $a_1 + d(p-1) = q$ i $a_1 + d(q-1) = p$ sledi

$$d = -1 \text{ i } a_1 = p + q - 1.$$

Primenom obrasca (1) nalazimo da je $a = p + q - n$.

b) iz sistema

$$a_1 + (m+n-1)d = A \wedge a_1 + (m-n-1)d = B \text{ sledi}$$

$$a_1 = \frac{An - Am + Bm + Bn + A - B}{2n}, d = \frac{A - B}{2n}.$$

Primenom obrasca (1) dobijamo

$$a_m = \frac{A+B}{2}, a_n = \frac{2An - Am + Bm}{2n}.$$

1108. $(n+1)(2n-1)$.

1109. 4905.

1110. n^2 .

1111. $\frac{((n+1)a - (n-1)b) \cdot n}{2}$.

1112. Iz zahteva $S_n = 3n^2$ ili $\frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2} = 3n^2$,

pošto je $n \neq 0$, sledi

$$2a_1 + d \cdot n - d = 6n \text{ ili } 2a - d = (6-d)n \quad (1)$$

Kako je $n \neq 0$, jednačina (1) je ekvivalentna sistemu

$$6-d=0 \wedge 2a-d=0, \text{ tj. } d=6; a=\frac{d}{2}=3;$$

traženi niz je 3, 9, 15, 21, ...

1113. Primenom obrasca (3) dobija se:

$$S_1 = \frac{2a_1 + d(n_1-1)}{2} n_1 \Rightarrow \frac{S_1}{n_1} = a_1 + \frac{d}{2}(n_1-1),$$

$$S_2 = \frac{2a_1 + d(n_2-1)}{2} n_2 \Rightarrow \frac{S_2}{n_2} = a_1 + \frac{d}{2}(n_2-1).$$

$$S_3 = \frac{2a_1 + d(n_3-1)}{2} n_3 \Rightarrow \frac{S_3}{n_3} = a_1 + \frac{d}{2}(n_3-1).$$

Ako se pomnože poslednje tri jednačine redom sa $(n_2 - n_3)$, $(n_3 - n_1)$ i $(n_1 - n_2)$, pa se saberu, dobija se

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = \\ = a_1((n_2 - n_3) + (n_3 - n_2) + (n_1 - n_2)) + \\ + \frac{d}{2}(n_1 - 1)(n_2 - n_3) + (n_2 - 1)(n_2 - n_1) + (n_3 - 1)(n_1 - n_2). \end{aligned}$$

Posle sređivanja na desnoj strani izrazi su jednaki nuli (ovi u zagradi), pa je

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0.$$

1114. Da bi niz bio aritmetički, treba da je

$$d = (a^2 + x^2) - (a + x)^2 = (a-x)^2 - (a^2 + x^2) = -2ax.$$

što znači da je niz aritmetički sa diferencijom

$$d = -2ax. \text{ Ako se primeni obrazac (3), dobija se}$$

$$S_n = \frac{(2(a+x)^2 - 2ax(n-1))a}{2} = (a^2 + (3-n)ax + x^2)n.$$

1115. Članovi $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{20}$ obrazuju aritmetički niz sa diferencijom $2d$, a broj članova je $n = 10$. Ako se primeni obrazac (3), dobija se

$$\frac{(2 \cdot a_2 + 9 \cdot 2d)10}{2} = 250, \quad a_2 + 9 = 25.$$

Zamenom $a_2 = a_1 + d$ dobija se:

$$a + 10d = 25 \quad (a).$$

Analogno iz progresije $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{19}$

$$a + 9d = 22 \quad (b).$$

Iz (a) i (b) sledi da je $a = -5$, a $d = 3$, pa je

$$a_{10} = a_1 + 9d = 22 \text{ i } a_{11} = a_1 + 10d = 25.$$

1116. Brojeve koje treba odrediti obrazuju aritmetički niz sa razlikom $d = 2$. Ako je prvi član a , progresija je:

$a, a+2, a+4, a+6$. Brojevi između njih su $a+1, a+3$ i $a+5$. Iz postojećeg zahteva u zadatku je

$$a^2 + (a+2)^2 + (a+4)^2 + (a+6)^2 = (a+1)^2 + (a+3)^2 + (a+5)^2 + 48.$$

Posle svodenja se dobija jednačina $a^2 + 6a - 27 = 0$.

Odatle je $a = 3$ ili $a = -9$.

Brojevi su 3, 5, 7, 9, ili -9, -7, -5, -3.

1117. a) Zbir desno predstavlja S_n aritmetičkog niza 3, 7, 11, ..., a taj zbir je 210. Ako se zamene vrednosti

a, d, S_n u (3) dobija se

$$\frac{6 + (n-1)4}{2} \cdot n = 210.$$

Posle očiglednih transformacija dobija se jednačina

$$2n^2 + n - 210 = 0, \text{ čija su rešenja } n = 10 \text{ i } n = -\frac{21}{2}.$$

Drugo rešenje ne dolazi u obzir, jer je broj članova ceo pozitivan.

$$x = a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$x = 3 + (10-1)4$$

$$x = 3 + 36 = 39.$$

b) $x = 73$.

1118. Pošto su a, b i c uzastopni članovi aritmetičke progresije, onda je

$$b = \frac{a+c}{2}.$$

Da bi izrazi bili tri uzastopna člana aritmetičke progresije, mora da je

$$b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right).$$

Ako zamenimo vrednost b u prvom izrazu, dobija se:

$$\frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+c}{ac} = \frac{1}{2} \left(a \left(\frac{2}{a+c} + \frac{1}{c} \right) + c \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a+c} \right) \right).$$

Posle sređivanja izraza u zagradama dobijamo

$$\frac{(a+c)^2}{2ac} = \frac{1}{2} \left(\frac{2ac + a^2 + ac}{c(a+c)} + \frac{ac + c^2 + 2ac}{(a+c)a} \right),$$

zatim

$$\frac{(a+c)^2}{2ac} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 + 3a^2 + 3ac^2 + c^3}{(a+c)ca} \text{ ili}$$

$$\frac{(a+c)^2}{2ac} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+c)^3}{(a+c)ac}, \text{ za } a+c \neq 0,$$

$$\frac{(a+c)^2}{2ac} = \frac{(a+c)^2}{2ac}.$$

1119. S obzirom da su a, b i c članovi aritmetičkog niza, onda je $2b = a + c$. Da bi rešenja kvadratne jednačine bila realna, mora da je $b^2 - ac \geq 0$.

Zamenom vrednosti za b dobija se $\frac{(a+c)^2}{4} - ac^2 \geq 0$.

Posle očigledne transformacije je $\frac{(a-c)^2}{4} \geq 0$.

Izraz na desnoj strani je uvek pozitivan, što je trebalo dokazati.

1120. Analogno zadatku 1118.

1121. Koristeći osobinu da je svaki član aritmetička sredina susedna dva člana, dobija se

$$2(x^2 + 1)^2 = (x^2 - 2x - 1)^2 + (x^2 + 2x - 1)^2.$$

Ako se desna strana kvadrira, dobija se

$$2(x^2 + 1)^2 = x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + x^3 + 4x^2 + 1 + 4x^3 - 2x^2 - 4x \text{ ili}$$

$$2(x^2 + 1)^2 = 2x^4 + 4x^2 + 2, \text{ odakle je } (x^2 + 1)^2 \equiv (x^2 + 1)^2.$$

Znači, tvrđenje je tačno.

1122. Uslov daje jednakost $2 \log_m x = \log_k x + \log_n x$.

Ako se svedu logaritmi na istu osnovu, tj. primeni

identitet $\log_a N = \frac{\log_k N}{\log_k a}$, dobija se

$$2 \frac{\log_k x}{\log_k m} = \frac{\log_k x}{\log_k k} + \frac{\log_k x}{\log_k n} \text{ ili } 2 \log_k n = \log_m (1 + \log_k n),$$

$$\log_k n^2 = \log_k m (\log_k k + \log_k n) = \log_k (kn) \log_k m.$$

Odatle je $n^2 = (kn)^{\log_k m}$.

1123. Ako se primeni obrazac (4), diferencija novog niza je

$$d = \frac{14-2}{8+1} = \frac{3}{2}.$$

Traženi niz je

$$2, 3\frac{1}{2}, 5, 6\frac{1}{2}, 8, 9\frac{1}{2}, 11, 12\frac{1}{2}, 14, 16\frac{1}{2}, \dots$$

1124. Za traženi niz je $a_1 = 0, a_{r+2} = 12$. Ako primenimo obrasce (1) i (3), dobijamo sistem

$$\frac{r+2}{2} (r+1)d = 150 \wedge (r+1)d = 12,$$

odavde je

$$d = \frac{1}{2}, r = 23.$$

1125. Razlika traženog niza je

$$d = \frac{B-A}{k+1}.$$

$$A, \frac{B+Ak}{k+1}, \frac{2B+A(k-1)}{k+1}, \frac{3B+A(k-2)}{k+1},$$

$$\frac{AB+A(k-3)}{k+1}, \dots, \frac{(k+1)B+A(k-k)}{k+1}.$$

Zbir niza je:

$$S_{k+2} = \frac{k+2}{2} \left(2A + (k+2-1) \cdot \frac{B-A}{k+1} \right).$$

$$S_{k+2} = \frac{k+2}{2} \left(2A + \frac{(k+1)(B-A)}{k+1} \right).$$

$$S_{k+2} = \frac{(k+2)(A+B)}{2}.$$

1126. $S_8 = 100$.

1127. Neka je broj interpoliranih brojeva r . Tada niz ima $r+2$ članova, gde je $a = 1, a_{r+2} = 31$. Iz obrasca za interpolaciju dobija se d . Za traženi niz

$$d = \frac{30}{r+1},$$

a prvi interpolirani broj je $a_2 = 1 + d$, dok je poslednji

$$a_{r+1} = 31 - d = \frac{31r+1}{r+1}.$$

Pretposlednji je $a_r = 31 - 2d$, $a_r = \frac{31r - 29}{r + 1}$.

Zbir interpoliranih brojeva je

$$\frac{1 + d + 31 - d}{2} r = 16r.$$

Najveći interpolirani brojevi su a_{r+1} i a_r , pa je iz uslova zadatka

$$4 \left(\frac{31r + 1}{r + 1} + \frac{31r - 29}{r + 1} \right) = 16r \text{ ili}$$

$$2r^2 - 29r + 14 = 0, \text{ odakle je } r = 14.$$

$$1128. a_n = 0, S_n = \frac{n - 1}{2}.$$

1129. Iz uslova zadatka $a_1 = (x - 7)^2$, $a_3 = (x + 1)^2$,

$$a_2 = \frac{(x - 7)^2 + (x + 1)^2}{2} = x^2 - 6x + 25.$$

Da bi se odredila vrednost za x , da je $a_2 = 20$, treba da je $x^2 - 6x + 25 = 20$. Odatle se za x dobijaju dve vrednosti: $x = 5$ i $x = 1$. Traženi niz je 4, 20, 36, ...

Iz jednačine $\frac{n}{2} (8 + (n - 1) 16) = 760$ sledi da je $n = 20$.

1130. Ako označimo stranice trougla sa a : $a + d$; $a + 2d$, dobija se sistem

$$a + (a + d) + (a + 2d) = 3h$$

$$a^2 + (a + d)^2 = (a + 2d)^2,$$

čija su rešenja za a : $a = \frac{3h}{4}$, odgovarajuće rešenje za d : $d = \frac{h}{4}$, te su stranice trougla

$$\frac{3h}{4}, h, \frac{5h}{4}.$$

1131. Iz sistema

$$a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 = 50 \wedge$$

$$\wedge 2((a + d) + (a + d)(a + 2d) + a(a + 2d)) = 94$$

nalazimo $a_1 = 3$, $d = 1$ ili $a_1' = 5$, $d' = -1$.

Dimenzije su 3 cm, 4 cm, 5 cm.

1132. Niz je r, a, b, c ili 4, $4 + d$, $4 + 2d$, $4 + 3d$. Ako se primeni poznati nam obrazac $r = \frac{P}{S}$, dobija se

$$4 = \sqrt{\frac{(2 + 2d)(2 + d)2}{6 + 3d}},$$

odakle je $d = 11$.

Stranice trougla su 15, 26 i 37, a površina 156 cm^2 .

1133. Iz sistema

$$a \pi (a + 2d) = 375 \pi \wedge a(a + d) = 300, \text{ sledi}$$

$$a = 15, d = 5, \text{ zapremina je } 1500\pi \text{ cm}^3.$$

1134. Iz sistema

$$a_1 + (n - 1) 3 = 44 \wedge \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1) 3) = 158.$$

Posle eliminacije a_1 , dobija se jednačina $3n^2 - 91n + 316 = 0$.

A odavde rešenje je $n = 4$, znači taj mnogougao je četvorougao.

1135. Iz jednačine $a^2 + (a + 3)^2 = (a + 6)^2$ dobija se $a = 9 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$ i $c = 15 \text{ cm}$.

1136. Neka su a, b i c merni brojevi stranica pravouglog trougla a, b i c su članovi aritmetičkog niza, ako je $2b = a + c$. Da bi trougao bio pravougli, mora da je $a^2 + b^2 = c^2$ ili

$$a^2 + b^2 = 4b^2 - 4ab + a^2 \Leftrightarrow b(3b - 4a) = 0.$$

Odavde je $b = 0$ ili $b = \frac{4a}{3}$.

Prvo rešenje ne odgovara zadatku (jer stranica trougla ne može biti 0).

Za c dobijamo $c = \frac{5a}{3}$. Ako je a ma koji broj, brojevi $a, \frac{4}{3}a, \frac{5}{3}a$,

obrazuju aritmetički niz sa $d = \frac{a}{3}$. Istovremeno je $a^2 + b^2 = c^2$, što znači, za svaku vrednost broja a dobijamo jedan pravougli trougao sa traženom osobinom.

1137. Ako jedna stranica trougla ima merni broj a , a razlika progresije je d , druge dve stranice biće $a + d$ i $a + 2d$, a obim $a + 3d$. Onda bi moralo biti $a + (a + d) + (a + 2d) = a + 3d \Leftrightarrow 3a + 3d = a + 3d$, odakle je

$$2a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Takav trougao ne postoji.

1138. Ako uglove trougla označimo sa $\alpha - d$, α i $\alpha + d$, onda je

$$(\alpha - d) + \alpha + (\alpha + d) = 180^\circ,$$

$$\sin(\alpha - d) + \sin \alpha + \sin(\alpha + d) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$$

Iz prve jednačine sledi da je $\alpha = 60^\circ$, a iz druge sledi

$$\sin(60^\circ - d) + \sin 60^\circ + \sin(60^\circ + d) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Oдавде } \sin(60^\circ - d) + \sin(60^\circ + d) = \frac{3}{2} \text{ ili}$$

$$2 \sin \frac{60^\circ - d + 60^\circ + d}{2} \cos \frac{60^\circ - d - 60^\circ - d}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{odakle sledi } \cos d = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = 30^\circ.$$

Uglovi trougla su 30° , 60° , 90° .

$$1139. \frac{n}{2}(6 + (n - 1)) + \frac{n}{2}\left(2 \cdot \frac{3}{2} + 6(n - 1)\right) = 360^\circ.$$

Sledi $n' = 10$ a $n'' < 0$.

$$1140. \text{ Iz } \frac{n}{2}(2 \cdot 5(n - 1)) + \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n - 1)(-10)) = 450,$$

sledi $n^2 + 41n - 180 = 0$, odakle je $n' = 4$ i $n < 0$.

$$1141. \text{ Iz jednačina } a_{21} = 4,9 + 20 \cdot 9,8 \text{ i}$$

$$S_{21} = \frac{21}{2}(2 + 4,9 + 20 \cdot 9,8),$$

sledi da je put u 21. $a_{21} = 200,9$ m, a put za 21 $S_{21} = 2160,9$ m.

$$1142. \text{ Ako primenimo obrazac (3), dobija se}$$

$$\frac{n}{2}(2 \cdot 4,9 + (n - 1)9,8) = 4410.$$

Oдавде $n = 30$ s.

$$1143. \text{ Primenom obrasca (1), dobija se}$$

$$646,8 + (n - 1)(-9,8) = 0. \text{ Odatle je } n = 67 \text{ s.}$$

$$1144. \text{ Analogno prethodnom zadatku dobija se } n = 160 \text{ s.}$$

$$1145. \text{ Pošto je slobodan pad } a_1 = 4,9, d = 9,8, n = 10.$$

Primenom obrasca (3)

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \cdot 4,9 + (10 - 1)9,8),$$

odavde je $S_{10} = 490$ m.

1146. Ako se formiraju tražene razlike, dobija se

$$f(x + 1) - f(x) = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$$

$$f(x + 2) - f(x + 1) = (x + 2)^2 - (x + 1)^2 = 2x + 3,$$

$$f(x + 3) - f(x + 2) = (x + 3)^2 - (x + 2)^2 = 2x + 5.$$

Pošto je

$$2x + 3 = \frac{(2x + 1)(2x + 5)}{2} = \frac{4x + 6}{2} = 2x + 3,$$

tvđenje je tačno!

$$1148. \text{ a) } f(x + 1) - f(x) = 2x - 2,$$

$$f(x + 2) - f(x + 1) = 2x,$$

$$f(x + 3) - f(x + 2) = 2x + 2.$$

Da bi funkcije činile aritmetički niz, mora biti

$$2x = \frac{(2x - 2) + (2x + 2)}{2} = 2x,$$

tj. zahtev je ispunjen.

$$\text{b) Iz jednačine } \frac{5}{2}(4x - 4 + 4 \cdot 2) = 60 \text{ sledi da je}$$

$x = 5$; progresija je 8, 10, 12, ...

$$\text{c) Iz } \frac{n}{2}(16 + (n - 1)2) > 120 \text{ sledi } n^2 + 7n - 120 > 0,$$

odavde $n > 8$, što znači da treba sabrati najmanje 9 članova da zbir bude veći od 120.

$$1149. \text{ Iz jednačine}$$

$$a + (m - 1)d + a(n - 1) = a + (m + n - 1)d$$

sledi $d = a$, pa je tražena progresija $a, 2a, 3a, \dots$

$$1150. \text{ Ako jednačine}$$

$$a = a_1 + (n - 1)d,$$

$$b = a_1 + (p - 1)d,$$

$$c = a_1 + (q - 1)d$$

pomnožimo redom sa $p - q$, $q - n$ i $n - p$, pa ih saberemo dobijemo:

$$a(p - q) + b(q - n) + c(n - p) =$$

$$= (a_1 + dn - d)(p - q) + (a_1 + dp - d)(q - n) + (a_1 + dq - d)(n - p).$$

Pošto je izraz na desnoj strani identičan nuli, sledi

$$a(p - q) + b(q - n) + c(n - p) = 0.$$

1151. a) Prema uslovu da je niz aritmetički, imamo

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d.$$

Ako je $d \neq 0$, izraz na levoj strani relacije (1)

možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \frac{1}{d} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) \frac{1}{d} + \dots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) \cdot \frac{1}{d} \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n d} = \frac{a_1 + (n-1)d - a_1}{a_1 a_n d} = \frac{n-1}{a_1 a_n}. \end{aligned}$$

Dobili smo ono što je trebalo dobiti i dokazati.

b) Ako je

$$(2) \quad \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

($n \geq 3$), pokažimo da brojevi $a_1, a_2, a_3, \dots$ obrazuju aritmetički niz. Neka je $n = 3$, tada je

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{a_3 + a_1}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2(a_1 + d)}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2a_2}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2}{a_1 a_3}.$$

Odatve je

$$\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_1 a_3} = \frac{1}{a_1 a_3} - \frac{1}{a_2 a_3} \Rightarrow \frac{a_3 - a_2}{a_1 a_2 a_3} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2 a_3},$$

tj. $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = d$.

Da bi tvrdjenje bilo dokazano, dovoljno je pokazati da iz (2) sleduje

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 4).$$

Ako u (2) umesto n stavimo $n-1$ i $n-2$, dobijamo redom

$$(3) \quad \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-2} a_{n-1}} = \frac{n-2}{a_1 a_{n-1}},$$

$$(4) \quad \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-3} a_{n-2}} = \frac{n-3}{a_1 a_{n-2}}.$$

Oduzimanjem (3) od (2) i (4) od (3) dobijamo redom

$$\frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n} - \frac{n-2}{a_1 a_{n-1}} = \frac{na_{n-1} - a_{n-1} - na_n + 2a_n}{a_1 a_{n-1} a_n},$$

$$\frac{1}{a_{n-2} a_{n-1}} = \frac{n-2}{a_1 a_{n-1}} - \frac{n-3}{a_1 a_{n-2}} = \frac{na_{n-2} - 2a_{n-2} - na_{n-1} + 3a_{n-1}}{a_1 a_{n-2} a_{n-1}},$$

$$\frac{1}{a_{n-1} a_n} - \frac{1}{a_1 a_n} = \frac{(n-2)(a_{n-1} - a_n)}{a_1 a_{n-1} a_n},$$

$$\frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_1 a_n - 1} = \frac{(n-2)(a_{n-2} - a_{n-1})}{a_1 a_{n-2} a_n - 1}.$$

Odatve sledi $a_1, -a_{n-1} = (n-2)(a_{n-1} - a_n)$,

$a_1 - a_{n-1} = (n-2)(a_{n-2} - a_{n-1})$, što dovodi do jednakosti

$a_{n-1} - a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$, koju je trebalo dokazati.

1152. Kako $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ čine aritmetički niz, važe jednakosti

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d. \text{ Na osnovu identiteta}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d},$$

a analogno se dobijaju:

$$\frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} = \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_4} + \sqrt{a_3}} = \frac{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}}{d},$$

$$\dots \dots \dots \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d}.$$

Sumiranjem dobijenih jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} &= \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d} = \\ &= \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n})} = \frac{a_1 + (n-1)d - a_1}{d(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}, \end{aligned}$$

što je trebalo dokazati.

1153. Neka su traženi brojevi $a, a+d, a+2d$ i neka je prvi deljiv sa d , tj. $a = dk$, tada je

$$\frac{a(a+d)(a+2d)}{6d} = \frac{dk(dk+d)(dk+2d)}{6d} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}.$$

Pošto su $k, k+1, k+2$ tri uzastopna prirodna broja, jedan od njih je deljiv sa 2, jedan sa 3, a njihov proizvod sa 6.

1154. Pošto je

$$a_1 = \frac{x-1}{x}, \quad a_n = \frac{1}{x} \text{ i } n = x-1,$$

tada je

$$S = \frac{x-1}{2} \left(\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} \right) = \frac{x-1}{2}.$$

1155. a) Tražena suma se dobija ako se u identitetu

$$3x^3 + 3x + 1 = (x + 1)^3 - x^3 \text{ zameni redom}$$

$x = 1, 2, 3, \dots, n$ i dobijene jednakosti sumiraju:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n =$$

$$(n + 1)^3 - 1 \text{ ili } 3S_2 + 3S_1 + n = (n + 1)^3 - 1, \text{ gde su } S_1 \text{ i } S_2 \text{ suma } n \text{ brojeva prirodnog niza i suma njihovih kvadrata.}$$

Zamenom $S_1 = \frac{(n + 1)n}{2}$ u poslednju jednakost dobija se

$$S_2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

b) Da bismo našli sumu kubova prvih n brojeva prirodnog niza, treba zameniti u identitetu:

$$4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x + 1)^4 - x^4, x = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Ako se sumiraju dobijene jednakosti, sledi da je

$$4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n = (n + 1)^4 - 1. \text{ Zamenom}$$

$$S_1 = \frac{(n + 1)n}{2} \text{ i } S_2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

u poslednju jednakost sledi da je

$$S_3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2} \right)^2.$$

1156. Ako se označi zbir prvih n članova traženog niza sa

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \text{ a zbir sledećih } k_n \text{ članova}$$

$$S' = \frac{a_{n+1} + a_{(n+1)k}}{2} \cdot kn.$$

$$\text{Neke je } S : S' = m, \text{ tj. } \frac{a_1 + a_n}{a_{n+1} + a_{(k+1)n}} = m, \text{ ili}$$

$$\frac{2a + (n - 1)d}{2a + (n - 1)d} = m.$$

$$2a + nd + (((k + 1)^n - 1)d)k$$

Odatle je posle sređivanja

$$(2a_1 - d)(mk - 1) - nd((k + 2)mk - 1) = 0.$$

Poslednji izraz, po uslovu zadatka, ne zavisi od n , ako je koeficijent uz n jednak nuli, tj.

$$(k + 2)mk - 1 = 0.$$

$$\text{Odatle je } m = \frac{1}{k(k + 2)}.$$

Izraz (1) posle zamene n dobija sledeći oblik:

$$(2a_1 - d) \frac{k + 1}{k + 2} = 0.$$

gde je drugi činilac različit od nule i zato je

$$2a_1 - d = 0, \text{ tj. } d = 2a_1. \text{ Traženi aritmetički niz ima oblik: } a_1, 3a_1, 5a_1, 7a_1, \dots$$

1157. Data jednakost može se transformisati u ovu jednakost:

$$(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_3 - a_4)(a_3 + a_4) + \dots$$

$$+ (a_{2k-1} - a_{2k})(a_{2k-1} + a_{2k}) = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2) \text{ ili}$$

$$-d(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2k}) = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2).$$

Iz identiteta

$$(1) \quad -dk(a_1 + a_{2k}) = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2),$$

pa iz jednakosti $d = a_{2k} - a_{2k-1}$ dobija se

$$d = a_{2k} - (a_1 + (2k - 2)d), \text{ odakle je } -d = \frac{a_1 - a_{2k}}{2k-1}.$$

Zamenom dobijene vrednosti za $-d$ u (1) dobija se

$$\frac{k}{2k-1} (a_1 - a_{2k})(a_1 + a_{2k}) = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2) \text{ ili}$$

$$\frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2) = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2), \text{ što je trebalo dokazati.}$$

1158. U opštem slučaju k -ta vrsta ima oblik

$$k, k + 1, k + 2, \dots, 2k - 1, \dots, 3k - 2.$$

Ovaj niz je aritmetički gde je $a_1 = k, a_n = 3k - 2$ i

$n = 2k - 1$, te je zbir vrste

$$S_n = \frac{k + 3k - 2}{2} (2k - 1) = (2k - 1)^2; \text{ što je trebalo dokazati.}$$

$$1159. \text{ Iz } \binom{n}{1} + \binom{n}{3} = 2 \binom{n}{2} \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Imamo $n^2 - 9n + 14 = 0$, odavde $n = 7$ ili $n = 2$.

Drugi koren odgovara zadatku, jer za $n = 2$ binomni razvoj nema četvrti član.

$$1160. \text{ Iz } \binom{n}{4} + \binom{n}{6} = 2 \cdot \binom{n}{5}, \text{ posle deljenja sa } \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

sledi $n^2 - 21n + 98 = 0$, odakle je $n = 14$ ili $n = 7$.

$$\begin{aligned}
 1161. \quad \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+c}{2}}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{a+c} + \sqrt{2c}} + \frac{2}{\sqrt{a+c} + \sqrt{2c}} \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{a+c} + \sqrt{2c}}{a-b} + \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{a+c}}{a-c} \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{a-c} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.
 \end{aligned}$$

$$1163. x = \log_2 5.$$

1164. a) Neka je $x^2 = y$, tada je

$$y_1 + y_2 = 3m + 2 \text{ i } y_1 y_2 = m^2. \text{ Za } y_1 > y_2 \text{ aritmetički niz je } -\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_2}, \sqrt{y_2}, \sqrt{y_1}.$$

Iz osobine aritmetičkog niza imamo

$$2\sqrt{y_2} = y_1 - \sqrt{y_2} \Rightarrow y_1 = 9y_2.$$

Iz sistema

$$y_1 + y_2 = 3m + 2 \wedge y_1 y_2 = m^2 \wedge y_1 = 9y_2 \text{ sledi da je}$$

$$m = 6 \text{ ili } m = -\frac{6}{13}$$

$$b) m = 7 \text{ ili } m = -\frac{17}{9}.$$

$$1165. a) x = 3; b) x = 2.$$

1166. Postoje četiri takve progresije. Jedna od njih je 6, 12, 18, 24. Odrediti ostale.

$$1167. 2, 5, 8, \dots \text{ ili } 23, 20, 17, \dots$$

$$1168. -2, 5, 12, \dots \text{ ili } 12, 5, -2, \dots$$

$$1169. 3, 5, 7, \dots, -\frac{29}{5}, -\frac{11}{5}, \frac{7}{5}, \dots$$

1171. a) Za $n = 1$, $a_1 - a_1 \cdot q^{1-1} = a_1$, tvrdjenje je tačno. Pretpostavimo da obrazac važi na $n = k$, tj. $a_k = a_1 q^{k-1}$. Dokažimo da je obrazac tačan i za $n = k + 1$, odnosno $a_{k+1} = a_1 q^{(k+1)-1}$.

Dokaz: Prema definiciji geometrijskog niza $a_{k+1} = a_k \cdot q$ ili s obzirom na pretpostavku $a_{k+1} = a_1 q^{(k+1)-1}$, što je trebalo dokazati.

b) Za $n = 1$, $S = a_1 \frac{q-1}{q-1} = a_1$, tj. suma od jednog člana jednaka je njemu samom. Pretpostavimo da je obrazac tačan za $n = k$, $S_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1}$.

Dokažimo ispravnost obrasca i za $n = k + 1$, odnosno

$$S_{k+1} = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + a_1 q^k = \frac{a_1 q^k - a_1 + a_1 q^{k+1} - a_1 q^k}{q - 1} = \\
 &= a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.
 \end{aligned}$$

Obrazac je tačan za svako n (prirodan broj).

1172. Ovde je $a_1 = 1$, $q = 3$, $n = 10$. Ako se primeni obrazac (1), dobija se $a_{10} = 1 \cdot 3^9 = 19683$.

1173. Kako je $a_6 = a_1 q^5$, to je $q^5 = \frac{a_6}{a_1} = 1024$, odakle je

$$q = \sqrt[5]{1024} = 4.$$

1174. Kako je $a_n = a_1 q^{n-1}$, to ćemo, kad zamenimo poznate veličine, dobiti jednačinu $4096 = 1 \cdot 2^{n-1}$. Zadatak se sveo na rešavanje ove jednačine (eksponencijalne). Broj 4096 rastavimo na činioce kao 2^{12} . Prema tome, gornja jednačina se svodi na eksponencijalnu jednačinu $2^{12} = 2^{n-1}$, čije su osnova i leve i desne strane jednake, pa će biti $12 = n - 1$. Odatle je $n = 13$.

1175. Ako se primeni obrazac (2), dobija se

$$S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot (2^{10} - 1) = 3(1024 - 1) = 3069.$$

1176. Primenom obrasca (2), dobija se

$$8190 = a_1 \frac{(2^{12} - 1)}{2 - 1}, \text{ odakle je } a_1 = 2.$$

$$1177. 16400 = \frac{5(3^n - 1)}{3 - 1} \Leftrightarrow 32800 = 5(3^n - 1), \\ 6560 = 3^n - 1 \Leftrightarrow 3^n = 6561 \Leftrightarrow 3^n = 3^8 \Leftrightarrow n = 8.$$

1178. Ako date veličine zamenimo u obrascima (1) i (2), dobije se sistem jednačina:

$$a_1 \cdot 2^{n-1} = 112 \wedge \frac{a_1(2^n - 1)}{2 - 1} = 217.$$

Iz prve jednačine će biti

$$a_1 = \frac{112}{2^{n-1}} = \frac{112}{2^n \cdot 2^{-1}} = \frac{224}{2^n}.$$

Ako se ova vrednost zameni u drugu jednačinu, dobiće se

$$\frac{224}{2^n}(2^n - 1) = 217, 224 - \frac{224}{2^n} = 217, \frac{224}{2^n} = 7,$$

odakle je $2^n = 32, 2^n = 2^5, n = 5$. Dalje je

$$a_1 = \frac{224}{2^n} = \frac{224}{2^5} = 7.$$

$$1179. q = 8.$$

$$1180. 1, 3, 9, 27, \dots \text{ ili } -3, 9, -27, -\dots$$

1181. Iz sistema $a_1 q^4 - a_1 = 15, a_1 q^3 = 6$ sledi

$$\frac{a_1(q^4 - 1)}{a_1 q(q^3 - 1)} = \frac{15}{6} \text{ za } a_1 \neq 0, q \neq 1; \frac{q^2 + 1}{q} = \frac{5}{2} \text{ ili } 2q^2 - 5q - 2 = 4,$$

$$\text{odakle je } q' = \frac{1}{2}, q'' = 2.$$

Odgovarajuća rešenja za a_1 su $a'_1 = -16$ i $a''_1 = 1$.

Nizovi koji zadovoljavaju postavljeni uslov su $-16, -8, -4, -2, \dots$ i $1, 2, 4, 8, \dots$

$$1182. 3, 6, 12, 24, \dots$$

$$1183. \text{ a) } 1, 2, 4, 8, \dots; \quad \text{ b) } 50, 10, 2, \frac{2}{5}, \dots, \text{ ili } 2, 10, 50, 250, \dots;$$

$$\text{ c) } a'_1 = 5 \text{ i } a''_1 = 1280, q' = \pm 4 \text{ ili } q'' = \pm \frac{1}{4}.$$

$$1184. \text{ Iz sistema } a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 112 \wedge a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^5 = 14 \\ \text{ proizlazi da je } q = \frac{1}{2} \text{ i } a_1 = 64.$$

1185. Iz sistema

$a_1 - a_1 q = 36 \wedge a_1 q^2 - a_1 q^3 = 4$ sledi da postavljeni uslov zadovoljava progresiju 54, 18, 6, 2 ili 27, -9, 3, -1.

$$1186. \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_4 + a_5 + a_6} = \frac{1}{q^3}, \frac{a_4 + a_5 + a_6}{a_7 + a_8 + a_9} = \frac{1}{q^3}.$$

1187. Neka su a, b i c merni brojevi stranica pravouglog trougla, tako da je $a < b < c$. Ako ovi čine progresiju, mora biti $b^2 = ac$. Pošto je trougao pravougli, $a^2 + b^2 = c^2$. Ako se iz ove dve jednačine izrazi b i c u funkciji od a , dobija se

$$b = \frac{a}{2} \sqrt{2(1 + \sqrt{5})}, c = \frac{a}{2} (1 + \sqrt{5}).$$

Stranice pravouglog trougla obrazuju geometrijski niz

$$a, \frac{a}{2} \sqrt{2(1 + \sqrt{5})}, \frac{a}{2} \sqrt{2(1 + \sqrt{5})},$$

$$\text{ kod koga je količnik } q = \frac{\sqrt{2(1 + \sqrt{5})}}{2}.$$

1188. Obrazuju i to: a, a^2, a^3 .

$$1189. 9, 12, 16.$$

$$1190. 18, 6, 2.$$

$$1191. \text{ Iz sistema } \frac{a^3 q^3}{3} = 576 \wedge \frac{a q^2 \sqrt{a^2 + a^2 q^2}}{2} = 120,$$

sledi da je

$$a = 9, q = \frac{4}{3}. \text{ Osnovne ivice su } 9 \text{ i } 12, \text{ visina } 16, \text{ a } P = 780 \text{ m}^2.$$

1192. Iz prve dve jednačine dobije se

$$a_1 q^3 (q^2 - 1) = 216 \wedge a_1 (q^2 - 1) = 8. \text{ Odakle je } q = 3, a_1 = 1. \text{ Za-} \\ \text{menom u treću jednačinu dobiće se}$$

$$40 = \frac{3^n - 1}{2}, \text{ a odavde } 3^n = 81, n = 4.$$

$$1193. q = \pm 8, S_5 = 10043 \text{ ili } 10925.$$

$$1194. a_1 = 5, a_7 = 320.$$

$$1195. q = 3, n = 7.$$

$$1196. a_n = -486, n = 6.$$

$$1197. a_1 = 1, q = 2, n = 10.$$

$$1198. a = -2, q = \pm 2, n = 6.$$

$$1199. a + aq + aq^2 + aq^3 = 9750.$$

$$\frac{aq^3 - a}{aq^2 - aq} = \frac{19}{6}.$$

Iz druge jednačine, za $a \neq 0$, dobija se $\frac{q^3 - 1}{q(q-1)} = \frac{19}{6}$;

za $q \neq 1$, $\frac{q^2 + q + 1}{q} = \frac{19}{6}$. Zatim $6q^2 - 13q + 6 = 0$,

odakle je $q = \frac{3}{2}$ ili $\frac{2}{3}$, $a = 1200$.

Traženi delovi su: 1200, 1800, 2700, 4050.

1200. a) Iz sistema: $a(1 + q^6) = 65 \wedge a^2q^6 = 64$ eliminacijom q^6 dobijamo jednačinu $a^2 - 65a + 64 = 0$, odakle je $a = 64$ i 1. Za q se dobije $q = \frac{1}{2}$ i 2. Rastuća progresija je: 1, 2, 4, 8, 16, ...

b) $1 \cdot q^{n-1} = 1024$, $2^{n-1} = 2^{10}$, $n - 1 = 10$, $n = 11$, 1024 je 11. član niza.

1201. Iz sistema:

$$a + aq + aq^2 = 57 \wedge aq = \frac{6}{13}(a + aq^2) \Leftrightarrow$$

$$a(1 + q + q^2) = 57 \wedge a(6q^2 - 13q + 6) = 0.$$

Iz druge jednačine, za $a \neq 0$, $6q^2 - 13q + 6 = 0$, odakle je

$$q = \frac{3}{2} \text{ ili } \frac{2}{3}.$$

Zamenom u prvu jednačinu $a = 12$ ili 27.

Traženi brojevi su 12, 18, 27.

1202. Iz sistema jednačina:

$$a + aq + aq^2 = 7 \wedge a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 21 \text{ imamo}$$

$$a(1 + q + q^2) = 7 \wedge a^2(1 + q + q^2) \cdot (1 - q + q^2) = 21,$$

odakle su traženi brojevi: 1, 2 i 4.

1204. Koristiti osobine geometrijske progresije

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow b^2 = ac, c^2 = bd, bc = ad.$$

$$1206. P_n = a_1 \cdot a_1q \cdot a_1 \cdot q^2 \dots a_1q^{n-1}, P_n = a_1^n q^{1+2+\dots+n-1} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

1207. 141 i 423.

$$1208. S_7 = \frac{b^7 - a^7}{b - a}.$$

$$1209. \frac{a}{b^2}, \frac{a}{b^2} \sqrt{\frac{b}{a}}; \frac{1}{b}, \frac{1}{b} \sqrt{\frac{b}{a}}; \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{b}{a^2}.$$

1210. 4, 16, 64, 156, 1024.

1212. 189.

$$1213. S_n = \frac{b^{n+1}}{a+b} = \left(\left(-\frac{a}{b} \right)^n - 1 \right)$$

$$1214. x = \frac{ac - b^2}{2b - a - c}; -3, 7, 14, 28.$$

$$1215. J, \frac{9}{10}J, \frac{81}{100}J, \dots a_6 = \frac{59049}{100000}J.$$

$$1216. 100, 80, 64, \frac{256}{5}, \dots a_{10} = \frac{1048576}{78125}.$$

$$1217. S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ ili } S_n = 1 + q + q^2 + \dots + a^{n-1}, \text{ pa je}$$

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}, \text{ odakle je}$$

$$q^n - 1 = (q - 1)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}).$$

$$\text{Za } n = 2, \quad q^2 - 1 = (q - 1)(1 + q);$$

$$\text{za } n = 3, \quad q^3 - 1 = (q - 1)(1 + q + q^2);$$

$$\text{za } n = 4, \quad q^4 - 1 = (q - 1)(1 + q + q^2 + q^3) \text{ itd.}$$

$$1218. S_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} \text{ ili } S_n = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}, \text{ odakle je}$$

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}, \text{ tj.}$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}).$$

$$\text{Za } n = 2 \text{ dobija se } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$\text{za } n = 3, a - b = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ itd.}$$

$$1219. S_1 = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, S_2 = a_{n+1} \frac{q^n - 1}{q - 1}, S_3 = a_{2n+1} \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a_1 q^n \frac{(q^n - 1)}{q - 1}}{\frac{q - 1}{a_1 (q^n - 1)}} = q^n, \frac{S_3}{S_2} = \frac{a_1 q^{2n} \frac{q^n - 1}{q - 1}}{a_1 q^n \frac{q^n - 1}{q - 1}} = q^n.$$

1220. Ako tražene brojeve označimo (a ovi obrazuju geometrijski niz) sa a, aq i aq^2 , brojevi koji obrazuju aritmetički niz su $a + 1, aq + 6$ i $aq + 3$. Iz postavljenih uslova u zadatku sledi sistem
 $a + aq + aq^2 = 26 \wedge 2(aq + 6) = (a + 1) + (aq^2 + 3)$,
 odakle je $a = 2, q = 3$.

Geometrijski niz je 2, 6, 18, a aritmetički 3, 12, 21.

1221. Koristeći osobine aritmetičkog i geometrijskog niza i postavljeni uslov zadatka, dobija se sistem:

$$(a+d-7)^2 = (a-2)(a+2d-9) \wedge (a+2d-9)^2 = (a+d-7)(a+3d-5).$$

Aritmetički niz: 5, 13, 21, 29, a geometrijski niz: 3, 6, 12, 24.

1222. Iz sistema:

$$2(aq+6) = (a+5) + (aq^2+9) \wedge 2(aq^2+9) = (aq+6) + (aq^3+15)$$

dobija se $a = 8$ i $q = \frac{3}{2}$, odakle je geometrijski niz: -8, -12, -18, -27;
 a aritmetički niz: -3, -6, -9, -12.

1223. a) Iz sistema:

$$a + (a+d) + (a+2d) = 3k \wedge \left(a + d + \frac{k}{5}\right)^2 = a(a+2d+k) \text{ sledi}$$

$$a = \frac{3}{5}k, d = \frac{2}{5}k, \text{ pa je aritmetički niz } \frac{3}{5}k, k, \frac{7}{5}k;$$

$$\text{a geometrijski niz } \frac{3k}{5}, \frac{6k}{5}, \frac{12k}{5}.$$

b) $n = 5$.

1224. Iz jednačine $(a+3d)^2 = a(a+24d)$ sledi $d = 2a$.

Aritmetički niz je $a; 3a; 5a; 7a; \dots$, a geometrijski niz je $a; 3a; 5a; 7a; \dots$

1225. Geometrijski niz je: a, aq i aq^2 . Za aritmetički niz $a_1 = a, a_2 = aq$ i $a_7 = aq^2$. Odakle je

$$d = a_2 - a_1 = a(q-1) \text{ i } 6a = a_7 - a_1 = a(q^2 - 1).$$

Ako se eliminiše d , dobija se $q^2 - 1 = 6(q-1)$, za $a \neq 0$. Iz ove jednačine je $q' = 5$ ili $q'' = 1$.

Jednačina $a + aq + aq^2 = 93$ daje odgovarajuća rešenja $a' = 3$ i $a'' = 31$. Brojevi su 3; 15; 75; ili 31; 31; 31.

1226. Analogno kao u prethodnom zadatku:

$$3d = a(q-1) \wedge 24d = a(q^2 - 1). \text{ Dobija se jednačina}$$

$$q^2 - 8q + 7 = 0, \text{ za } a \neq 0. \text{ Odakle je } q' = 7, q'' = 1.$$

$$\text{Iz jednačine } a - aq + aq^2 = 114 \text{ sledi } a' = 2 \text{ i } a'' = 38.$$

Traženi brojevi su 2, 14, 98, ili 38, 38, 38.

1227. Ako a, b, c čine aritmetički, a x, y i z geometrijski niz, tada je

$$b = \frac{a+c}{2}, ay^2 = xz.$$

Zamenom ove vrednosti u datu jednakost dobija se

$$x^{\frac{(a+c)}{2} - c} \cdot (xz)^{\frac{1}{2}(c-a)} \cdot z^{a - \frac{(a+c)}{2}} = 1 \text{ ili}$$

$$x^{\frac{(a-c)}{2}} \cdot x^{\frac{(c-a)}{2}} \cdot z^{\frac{(c-a)}{2}} \cdot z^{\frac{(a-c)}{2}} = 1,$$

$$\text{tj. } x^0 \cdot z^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

1228. Rešenje sistema

$$a + d = 14 \wedge b + c = 12 \wedge b^2 = ac \wedge b + d = 2c$$

daje tražene brojeve

$$a = 2, b = 4, c = 8 \text{ i } d = 12 \text{ ili } \frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}.$$

1229. Iz sistema

$$\theta_2 - \theta_0 = \theta_3 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_3 \wedge \frac{\rho_2}{\sqrt{2}} = \frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{4}{\rho_3}$$

$$\text{sledi } \theta_2 = \frac{\pi}{6}, \theta_3 = \frac{\pi}{3} \text{ a } \rho_2 = 2, \rho_3 = 2\sqrt{2}. \text{ Traženi brojevi su:}$$

$$a = \sqrt{2} (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ), \quad b = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right),$$

$$c = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad d = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

1230. a) $x = \frac{(1+q)^2}{2}$ iz uslova $r \neq 1$. Ako je $q = 1$, zadatak je neodređen.

b) $d = q(1-q^2)$, aritmetički niz je rastući ako je

$$0 < q < 1. \text{ Tada je } \frac{1}{2} < x < 2.$$

$$\text{Poseban slučaj: } x = \frac{9}{4}, d = \frac{3}{8}, a_1 = \frac{1}{64}.$$

1231. Neka su traženi brojevi $a; aq; aq^2; aq^3$. Iz postavljenog uslova je:

$$\log a + \log aq + \log a + \log aq^2 = \log aq^3 = 18$$

$\wedge \log_3 a + \log_3 q - \log_3 a = 1$, odakle je $q = 3$. Ako se zameni q u prvoj i izvrše naznačene operacije, sledi $\log_3 a = 3, a = 27$.

Brojevi sa postavljenim osobinama su: 27, 81, 243, 729.

1232. Polazeći od uslova $\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_2}{a_6} = \dots = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = q$,

lako se dobija da je $\frac{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}} = q$.

1233. Ako se podele jednakosti $a_m = a_1 q^{m-1}$ i

$a_n = a_1 q^{n-1}$, sledi da je $\frac{k}{l} = q^{m-n}$ ili $q = \sqrt[m-n]{\frac{k}{l}}$, a $a_1 = \sqrt[m-n]{\frac{k^{m-1}}{l^{n-1}}}$.

Zamenom q i a_1 u obrazac $a_p = a_1 q^{p-1}$ sledi da je: $a_p = \sqrt[m-n]{\frac{k^{p-m}}{l^{p-n}}}$.

1234. Pošto je: $1 = \frac{10-1}{9}$, $11 = \frac{10^2-1}{9}$, ... $\frac{10^n-1}{9}$.

Sumiranjem se dobija:

$$S_n = \frac{1}{9} (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n) = \frac{1}{9} \left(\frac{10(10^n-1)}{9} - n \right).$$

1235. Ako pomnožimo obe strane jednakosti (1) sa x , dobija se:

(2) $xS_{n+1} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots + (n+1)x^{n+1}$.

Oduzimanjem (2) od (1) sledi da je:

$(x-1)S_{n+1} = -1(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n) + (n+1)x^{n+1}$,

odakle je

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{x-1} - \frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2}.$$

1236. Ako je niz geometrijski, tada je:

$(x^2 + x_1^2 q^2 + \dots + x_1^2 q^{2(n-1)}) \cdot (x_1^2 q^2 + x_1^2 q^2 + x_1^2 q^4 + \dots + x_1^2 q^{2(n-2)}) =$
 $= (x_1^2 q + x_1^2 q^3 + \dots + x_1^2 q^{2(n-3)})^2$ ili

$$\frac{x_1^2 (q^{n-1} - 1)}{q-1} \cdot \frac{x_1^2 q^2 (q^{n-1} - 1)}{q-1} = x_1^4 q^2 \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q-1} \right)^2,$$

odakle je

$$x_1^4 q^2 \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q-1} \right)^2 = x_1^4 q^2 \left(\frac{q^{n-2} - 1}{q-1} \right)^2.$$

1237. $S_n' = \frac{q^{n-1} + q^{n-2} + q^2 + 1}{a_1^2 q^{n-1}} = \frac{a_1 (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)}{a_1^2 q^{n-1}} = \frac{S_n}{a_1 q^{n-1}}$

ili

(1) $a_1^2 q^{n-1} = \frac{S_n}{S_n'}$. Proizvod

(2) $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = a_1^2 q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (zadatak 1206).

Stepenovanjem leve i desne strane jednačine (1) sa $\frac{n}{2}$ sledi

$$a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(\frac{S_n}{S_n'} \right)^{\frac{n}{2}},$$

te je na osnovu (2), traženi proizvod

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \left(\frac{S_n}{S_n'} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

1238. Koristiti se osobinom $a_1 a_n = 12^2$, $n = 5$.

1239. 4, 8, 16, i 16, 8, 4.

1240. 2, 4, 8, 16.

1241. 2, 5, 8, 11.

1242. 2, 4, 6, 8.

1243. 17, 14, 11.

1244. $S_{20} = 100$.

1245. Neka je $a_m = \sqrt{2}$, $a_k = 3$, $a_p = 5 + \sqrt{2}$, ili

$a_1 + (m-1)d = \sqrt{2}$, $a_1 + (k-1)d = 3$,

$a_1 + (p-1)d = 5 + \sqrt{2}$.

Eliminacijom a_1 i d iz poslednje tri jednačine dobija se

$$\frac{8 - 5\sqrt{2}}{2} = \frac{k-m}{p-k}.$$

Ova jednakost je nemoguća, jer je leva strana iracionalna, a desna racionalna.

1247. Kako je $\frac{5}{6} = \frac{6-1}{6} = 1 - \frac{1}{6}$, $\frac{11}{12} = \frac{12-1}{12} = 1 - \frac{1}{12}$,

itd ..., onda je

$$S_n = n - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$$

1248. 2, 6, 18 ili 18, 6, 2.

1250. Iz sistema

$a_l = a_1 + (l-1)d \wedge a_k = a_1 + (k-1)d$

$a_m = a_1 + (m-1)d \wedge a_n = a_1 + (n-1)d$ lako se dobija da je

$a_1 - a_k = (l-k)d$,

$$(1) \quad a_m - a_l = (m-l)d, \quad a_n - a_m = (n-m)d.$$

Na osnovu pretpostavke zadatka, imamo $a_1 = a_k q$,

$$(2) \quad a_m = a_1 q, \quad a_n = a_m q, \quad a_l^2 = a_k \cdot a_m.$$

Iz (1) i (2) lako se dobija da je

$$(m-l)^2 = (k-l)(m-n).$$

$$1251. \quad 0, 5, 10, 20, \text{ i } \frac{75}{4}, \frac{45}{4}, \frac{15}{4}, \frac{5}{4}.$$

$$1252. \quad 5, 15, 45, 75 \text{ i } 80, 40, 20, 0.$$

$$1254. \quad d = 20; q = \pm 3.$$

$$1255. \quad d = 0, q = \pm 1 \text{ ili } d = 3, q = \pm 2.$$

$$1256. \quad 1, 3, 9 \text{ ili } \frac{1}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{25}{9}.$$

$$1257. \quad S_{19} = 190.$$

$$1258. \quad q = \frac{1}{2}.$$

$$1259. \quad 18, 24, 32.$$

$$1260. \quad \text{Geometrijski niz: } 2, 6, 8, \dots$$

$$\text{Aritmetički niz: } -3, 0, 3, \dots$$

$$1261. \quad \text{a) } \frac{1}{5}, 1, 5 \text{ i obrnuto; } \quad \text{b) } \frac{18 + \sqrt{299}}{5}, -1, \frac{18 - \sqrt{299}}{5} \text{ i obrnuto.}$$

$$1262. \quad x = 10 \text{ ili } x = 0, 1. \text{ U oba slučaja progresija je } 1, 5, 25, \dots, \text{ pa je } a_x = a_{10} = 5^9.$$

$$1263. \quad \text{a) Ako su stranice trougla } a, b = aq, c = aq^2, \text{ koristeći uslov } |b-a| < c < b+a, \text{ dobije se traženi uslov.}$$

$$\text{b) } q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

$$1264. \quad \text{a) } x = 1, \text{ niz: } 8, 22, 36, \dots;$$

$$\text{b) } x = 5 \vee x_2 = -95 \text{ nizovi su: } 10, 20, 40, \dots \text{ ili } -90, 120, -160, \dots$$

$$1265. \quad \text{Aritmetički niz: } 20, 15, 10, 5.$$

$$\text{Geometrijski niz: } 3, 6, 12, 24.$$

$$1266. \quad A : 2, 5, 8, \dots; G : 3, 6, 12, \dots \text{ ili}$$

$$A : \frac{25}{2}, \frac{79}{6}, \frac{83}{6}, \dots; G : \frac{2}{3}, \frac{25}{3}, \frac{625}{6}, \dots$$

$$1267. \quad G : 7, 21, 63, \dots \text{ ili } 63, 21, 7, \dots$$

$$A : 32, 48, 64, \dots; \text{ ili } 88, 48, 8, \dots$$

$$a_7 = 5103 \text{ ili } a_7 = \frac{7}{81}.$$

8.5. DIFERENCNE JEDNAČINE

$$1268. \quad \text{Smenom } x_n = t^n \text{ dobijamo karakterističnu jednačinu date diferencne jednačine } t^{n+1} - 5t^n = 0. \text{ Njeno rešenje je } t = 5. \\ \text{Opšte rešenje date diferencne jednačine je } x_n = C_1 5^n \text{ i predstavlja geometrijski niz sa prvim članom } C_1 \text{ i količnikom } 5.$$

$$1269. \quad x_n = C_1 \cdot 3^n.$$

$$1270. \quad x_n = C_1 (-1)^n.$$

$$1271. \quad \text{Primedba. Partikularno rešenje diferencne jednačine dobija se iz opšteg rešenja izračunavanjem proizvoljnih konstanti } C_1, C_2, \dots \text{ iz zadatih početnih uslova. Opšte rešenje je}$$

$$x_n = C_1 \cdot 2^n, \text{ za } x_1 = 1, C_1 = \frac{1}{2}, \text{ pa je partikularno rešenje } x_n = 2^{n-1}.$$

$$1272. \quad x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n.$$

$$1273. \quad x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n.$$

$$1274. \quad x_n = C_1 \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^n + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$

$$1275. \quad x_n = C_1 (1 + 2i)^n + C_2 (1 - 2i)^n.$$

$$1276. \quad \text{Primedba. Ako karakteristična jednačina diferencne jednačine ima dvostruko rešenje } t_1 = t_2 = t, \text{ tada je njeno opšte rešenje } x_n = (C_1 + n \cdot C_2) t^n. \text{ Ako je rešenje trostruko, opšte rešenje ima oblik } x_n = (C_1 + n \cdot C_2 + n^2 C_3) t^n.$$

$$\text{Za datu jednačinu } t_1 = t_2 = 3, \text{ pa je njeno opšte rešenje}$$

$$x_n = (C_1 + n \cdot C_2) 3^n.$$

$$1277. \quad x_n = C_1 (i\sqrt{3})^n + C_2 (-i\sqrt{3})^n.$$

$$1278. \quad x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + C_3 \cdot 4^n.$$

$$1279. \quad x_n = C_1 + C_2 (-1)^n + C_3 (-2)^n.$$

$$1280. \quad x_n = C_1 \cdot i^n + C_2 (-i)^n + C_3 \cdot 3^n.$$

$$1281. \quad x_n = C_1 + n \cdot C_2 \cdot 2^n + C_3 (-2)^n.$$

$$1282. \quad x_n = (C_1 + n C_2) (-4)^n + C_3 (-2)^n.$$

$$1283. x_n = (C_1 + nC_2 + n^2C_3) 2^n.$$

$$1284. x_n = C_1 + nC_2 + n^2C_3.$$

$$1285. x_n = (C_1 + nC_2 + n^2C_3) (-1)^n.$$

$$1286. \text{ Opšte rešenje je } a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n, \text{ a partikularno } a_n = 5 \cdot 2^n - 3^{n+1}.$$

$$1287. a_n = 3^n.$$

$$1288. x_n = n \cdot 2^n.$$

$$1289. x_n = 2^n + 3^n - 4^n.$$

$$1290. x_n = 2^n + 1.$$

$$1291. x_n = 2^n - 1.$$

1292. Pošto jednačina $x^2 - 6x + 9 = 0$ ima dvostruki koren, smenom

$$a_n = b_n + n\alpha \text{ dobija se}$$

$$b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n - 4\alpha = -4.$$

Izračunati α tako da je $-4\alpha = -4$, ili $\alpha = 1$. Opšta rešenja su

$$b_n = (C_1 + nC_2) 3^n, a_n = n + (C_1 + nC_2) 3^n, \text{ a partikularno}$$

$$a_n = n + (1-n) 3^n.$$

1293. Neka je $a_n = b_n + \alpha$, tada je

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n + \alpha - 5\alpha + 6\alpha = 4. \text{ Odredimo } \alpha \text{ tako da je}$$

$$\alpha - 5\alpha + 6\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2, \text{ tada je}$$

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0, \text{ odavde sledi da je}$$

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + 2.$$

8.6. GRANIČNA VREDNOST BESKONAČNOG NIZA

$$1294. a) n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1; b) n_0(\varepsilon) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{12\varepsilon + 17}{\varepsilon}};$$

$$c) n_0(\varepsilon) = \frac{1}{3\varepsilon}; d) n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{27\varepsilon^3}}.$$

$$1295. a = \frac{3}{2}; b) n_0(\varepsilon) = 124.$$

1296. Uputstvo. Opšti član napiši u obliku

$$\frac{1}{n^2} (1+2+\dots+n) \text{ itd.}$$

$$a) a = \frac{1}{2}; b) n_0(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} = 5000.$$

$$1297. n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 2;$$

$$a) n_0 = 8; b) n_0 = 98; c) n_0 = 998; d) n_0 = 9998.$$

$$1298. a) 15; b) 1; c) \frac{1}{3}; d) 2; e) \frac{4}{3}; f) 3; g) -\frac{5}{2}.$$

$$1299. n_0 = 2777.$$

$$1300. a = \frac{4}{3}, n_0 = 24.$$

$$1301. a_n = 1 - \frac{1}{10^n}; a = 1, n_0 = 4.$$

$$1302. a = \frac{3}{4}, n_0 = 18.$$

1303. Iskoristićemo poznatu jednakost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Granična vrednost datog niza smenom $\frac{3}{n} = \frac{1}{h}$ može se transformisati postupno.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{3h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h\right)^3 = e^3.$$

$$1304. a) c^{-1}; b) c^{-0.5}; c) c; d) c^{-3}; e) e^{-1.5}; f) -2; g) 3.$$

$$1305. \text{ Uočimo razliku } \frac{1}{3} a_n - a_n = \left(\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n}\right), \text{ ili } -\frac{2}{3} a_n = -\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{2}{3^2}\right) + \left(\frac{2}{3^3} - \frac{3}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{n-1}{3^n} - \frac{n}{3^n}\right) + \frac{n}{3^{n+1}}, \text{ odavde}$$

$$(1) -\frac{2}{3} a_n = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) + \frac{n}{3^{n+1}} = S_n + \frac{n}{3^{n+1}}.$$

Zbir S_n u zagradi je zbir geometrijskog niza, pa je

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

Tada (1) postaje

$$-\frac{2}{3} a_n = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{n}{3^{n+1}} \Rightarrow a_n = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{n}{2 \cdot 3^n}, \text{ pa je}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \frac{n}{2 \cdot 3^n}\right) = \frac{3}{4}.$$

$$1306. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

1307. Ako je $a_n = r^n$, tada data rekurentna formula svodi se na diferencnu jednačinu

$$2r^n = r^{n+1} + r^{n-2} \Leftrightarrow 2r^2 - r - 1 = 0,$$

odakle nalazimo $r_1 = -\frac{1}{2}, r_2 = 1$.

Pa je $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ili $a_n = 1^n$.

Opšte rešenje diferencne jednačine je

$$a_n = C_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \cdot 1^n.$$

Za $n = 0$, odnosno $n = 1$ dobijemo sistem

$$C_1 + C_2 = a \wedge -\frac{1}{2}C_1 + C_2 = b, \text{ pa je}$$

$$C_1 = \frac{2}{3}(a - b), C_2 = \frac{a + 2b}{3}.$$

Granična vrednost niza $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a + 2b}{3}$.

$$\text{Dakle } a_n = \frac{a + 2b}{3} + (-1)^n \frac{2(a - b)}{3 \cdot 2^n}$$

$$1308. a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sqrt[3]{n^4 - n^6}) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2)^3 + (\sqrt[3]{n^4 - n^6})^3}{n^4 + n^2 \sqrt[3]{n^4 - n^6} + \sqrt[3]{(n^4 - n^6)^2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4 \left(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{n^2 - 1}} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^2 - 1}\right)^2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

$$b) \frac{1}{3}, \quad c) 0.$$

$$1309. a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2n}{n+3} - \frac{2(n-1)}{(n-1)+3} = \frac{6}{(n+2)(n+3)}.$$

Niz je ograničen: $0 < a \leq \frac{1}{2}$, pa je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, tj. konvergira.

$$1310. \text{ Kako je } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1 - 3^n}{2 \cdot 3^n} - \frac{1 - 3^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}} = -\frac{1}{3^n},$$

opšti član niza je eksponencijalna funkcija, što znači da je geometrijski. Niz je monotono rastući, ograničen, $-\frac{1}{3} \leq a < 0$.

1311. a) $a_n = S_n - S_{n-1} = 19n - 99$. Opšti član je linearna funkcija od n , pa je niz aritmetički:
 $a_1 = -80, d = 19$.

b) Iz jednačine $a_{n+1} = 2S_n$ sledi samo jedno celo pozitivno rešenje
 $n = 10$.

1312. a) $a_n = \frac{1}{5^{n-1}}$, niz konvergira.

$$b) S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 5}{4 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{5}{4}.$$

$$1313. a) a_n = \frac{4}{2^n}; \quad b) S = 4.$$

1314. Pošto je

$$a_3 = a_1 + a_2,$$

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 2a_3,$$

$$a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2a_4$$

$$\dots \dots \dots a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} = 2a_{n-1},$$

proizlazi da je niz $a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$ geometrijski sa količnikom $q=2$.

$$a_{11} = a_3 q^8 \text{ ili } 512 = a_3 \cdot 2^8 \Rightarrow a_3 = 2.$$

Kako je $a_3 = a_1 + a_2$, a članovi niza su celi pozitivni brojevi, to iz

$$a_1 + a_2 = 2 \Rightarrow a_1 = a_2 = 1$$

$$a_{14} = a_3 q^{11} = 2 \cdot 2^{11} = 4096.$$

8.7. BESKONAČNI RED

$$1315. a) a = 1, q = -\frac{1}{3}, S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4};$$

$$b) S = 21, c) S = \frac{3\sqrt{6}}{2}; d) \frac{16 + 11\sqrt{2}}{7}.$$

$$1316. a_1 = 10, q = \frac{1}{5} \text{ ili } a_1 = 15, q = -\frac{1}{5}.$$

$$1317. \text{ Iz } a = 2(aq + dq^2 + aq^3 + \dots) = 2 \frac{aq}{1-q} \text{ sledi } q = \frac{1}{3}.$$

$$1318. \frac{5}{26} + \frac{5}{26^2} + \frac{5}{26^3} + \dots$$

1319. Leva i desna strana date jednakosti predstavljaju geometrijske opadajuće redove. Posle njihovog sumiranja sledi da je

$$a) 2 \equiv 2; b) 3 \equiv 3.$$

1320. a) $S = \frac{1}{1 - \cos x}$; b) $S = \frac{1}{1 + \sin x}$; c) $S = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x}$; d) $S = \frac{x}{(2x-4)}$;
 e) Dati red se može napisati u obliku
 $(x + x^3 + x^5 + \dots) + 2(x^2 + x^4 + \dots)$, odavde $S = \frac{x(1+2x)}{1-x^2}$;

f) $S = \frac{2+3x}{1-x^2}$; g) $S = \frac{4-3x}{1-x^2}$.

1321. a) $S = \frac{6}{3-2x} = \frac{6}{3\left(1-\frac{2x}{3}\right)} = \frac{2}{1-\frac{2x}{3}}$, odavde je $a = 2$ i $q = \frac{2x}{3}$.

Geometrijski niz čiji dati zbir S glasi

$$2 + \frac{4x}{3} + \frac{8x^2}{9} + \frac{16x^3}{27} + \dots;$$

b) $\frac{3}{3-x} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + \dots;$

c) $\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - \dots;$

d) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$

1322. $63 + \frac{63}{8} + \frac{63}{8^2} + \frac{63}{8^3} + \dots$ ili $63 - \frac{63}{8} + \frac{63}{8^2} - \frac{63}{8^3} + \dots$

1323. a) Dati izraz može se napisati u obliku:

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot 5^{\frac{1}{16}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}} \dots$$

$$5^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}} = \sqrt[3]{45}, \text{ jer je:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{2n+1}} + \dots \right) = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots \right) = \frac{1}{3};$$

b) 2.

1324. Ovaj razlomak možemo predstaviti kao zbir članova jednog beskonačno opadajućeg geometrijskog reda, i to ovako:

$$0,777\dots = 0,7 + 0,07 + 0,007 + \dots + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

Količnik ove progresije je $q = \frac{1}{10}$, a prvi član je $a = \frac{7}{10}$.

$$S = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}, \text{ odavde } 0,777\dots = \frac{7}{9},$$

1325. Dati razlomak se može napisati i ovako:

$$0,3444\dots = 0,3 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + \dots \text{ ili}$$

$$0,3444\dots = \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \dots$$

Geometrijski red u zagradi ima količnik $q = \frac{1}{10}$, a prvi član $a = \frac{4}{100}$,

pa će prema obrascu $S = \frac{a}{1-q}$ zbir biti $S = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{90}$, a vrednost

$$\text{razlomka } 0,3444 = \frac{3}{10} + \frac{4}{90} = \frac{31}{90}.$$

1326. a) $\frac{5}{9}$; b) $2\frac{71}{99}$; c) $\frac{7}{18}$; d) $1\frac{817}{1986}$; e) $\frac{142}{825}$; f) $\frac{1}{7}$.

1327. a) Opšti član reda može se rastaviti na dva prosta razlomka u obliku

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Neka je $k = 1, 2, 3, 4, \dots, n$, tada poslednji izraz dobija ovaj oblik:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ako se ove vrednosti sumiraju, dobija se da je suma prvih n članova reda

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ako broj članova neograničeno raste, tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 = S.$$

Suma reda je $S = 1$.

b) Analogno prethodnom zadatku

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right).$$

$$S = \frac{1}{2}.$$

c) $S = \frac{1}{4}$; d) $S = \frac{3}{4}$.

1328. Stranica prvog trougla ABC je a , neka je a_1 stranica drugog trougla $A_1B_1C_1$; a stranica trougla ABC itd. (sl. 44).

Stranica drugog trougla je $a_1 = \frac{a}{2}$, trećeg $a_2 = \frac{a}{4}$, itd. Obimi tih trouglova su $O_1 = 3a$; $O_2 = \frac{3a}{2}$; $O_3 = \frac{3a}{4}$ itd.

Kako je $\frac{O_2}{O_1} = \frac{\frac{3a}{2}}{3a} = \frac{1}{2}$; $\frac{O_3}{O_2} = \frac{\frac{3a}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{1}{2}$, onda će obimi svih trouglova

da obrazuju geometrijski red: $3a$; $\frac{3}{2}a$; $\frac{3}{4}a$; ... čiji je prvi član $3a$, a količnik $q = \frac{1}{2}$.

Prema tome, zbir $S = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$. Površine tih trouglova su

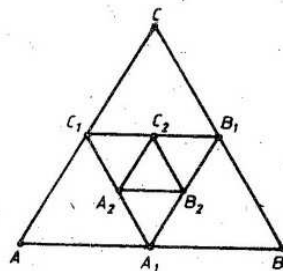
$$P_1 = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad P_2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{16} \cdot \sqrt{3}; \quad P_3 = \frac{a^2}{64} \cdot \sqrt{3} \text{ itd.}$$

Kako je $\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{1}{4}$, to će površine ovih trouglova obrazovati geometrijski konvergentni red:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{64} \dots$$

Zbir površina svih trouglova je:

$$S = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$



Slika 44

1329. Neka su $r_1, r_2, r_3, \dots$ poluprečnici kružnica a $a_1, a_2, a_3, \dots$ stranice trouglova (sl. 45.) Poluprečnik opisane kružnice oko prvog trougla je $r = \frac{a_1\sqrt{3}}{3}$, odakle je $a_1 = r\sqrt{3}$, a poluprečnik upisane kružnice je

$$r_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{6}. \text{ Odatle je } a_1 = 2r_1\sqrt{3}; \text{ a kako je } a = r\sqrt{3}, \text{ to je } r\sqrt{3} = 2r_1\sqrt{3} \text{ ili } r_1 = \frac{r}{2}.$$

Na taj način smo dobili poluprečnik druge kružnice. Ako primenimo na drugu i treću kružnicu i drugi i treći trougao isti postupak, dobija se:

$$a_2 = \frac{r\sqrt{3}}{4}, r_2 = \frac{r}{4}; a_3 = \frac{r\sqrt{3}}{8}; r_3 = \frac{r}{8} \dots$$

Obimi i površine trouglova su:

$$O_1 = 3a_1 = 3r\sqrt{3}; O_2 = 3a_2 = \frac{3r\sqrt{3}}{2}; O_3 = 3a_3 = \frac{3r\sqrt{3}}{4}, \dots$$

$$P_1 = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4},$$

$$P_2 = \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{16},$$

$$P_3 = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{64}.$$

$$\text{Kako je } \frac{O_2}{O_1} = \frac{O_3}{O_2} = \frac{1}{2}, \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{1}{4},$$

onda će obimi obrazovati geometrijski beskonačni konvergentni red.

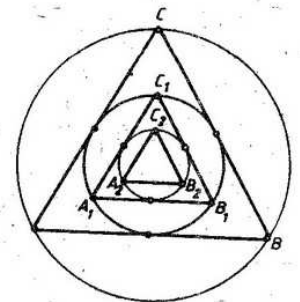
$$3r\sqrt{3} + \frac{3r\sqrt{3}}{2} + \frac{3r\sqrt{3}}{4} + \dots$$

a površine

$$\frac{3r^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3r^2\sqrt{3}}{16} + \frac{3r^2\sqrt{3}}{64} + \dots$$

Traženi zbirovi su

$$S = \frac{3r\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2}} = 6r\sqrt{3}; \quad S = \frac{\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = r^2\sqrt{3}.$$



Slika 45

Obimi kružnica i površine krugova su

$$O_1 = 2r\pi; O_2 = 2\frac{r}{2}\pi = r\pi; O_3 = 2 \cdot \frac{r}{4}\pi = \frac{r\pi}{2}, \dots$$

$$P_1 = r^2\pi; P_2 = \frac{r^2\pi}{4}; P_3 = \frac{r^2\pi}{16}, \dots$$

Pošto je $\frac{O_2}{O_1} = \frac{O_3}{O_2} = \frac{1}{2}$ i $\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{1}{4}$,

odgovarajući geometrijski redovi su

$$2r\pi + r\pi + \frac{r\pi}{2} + \dots$$

$$r^2\pi + \frac{r^2\pi}{4} + \frac{r^2\pi}{16} + \dots$$

Zbir obima svih kružnica je $S = \frac{2r\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 4r\pi$;

a zbir površina $S = \frac{r^2\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4r\pi}{3}$.

1330. Stranice kvadrata su $a, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}, \dots$

Zbir površina svih kvadrata je

$$S_p = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \dots = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2, \text{ a zbir obima}$$

$$S_o = 4a + \frac{4a}{\sqrt{2}} + 2a + \frac{4a}{2\sqrt{2}} + \dots = \frac{4a}{1 - \frac{1}{2}} = 4(2 + \sqrt{2})a.$$

1331. Tražene površine obrazuju geometrijski konvergentni niz

$$6r^2\pi, \frac{3r^2\pi}{2}, \frac{3r^2\pi}{8}, \dots$$

Za zbir površina se dobija $S = \frac{6r^2\pi}{1 - \frac{1}{4}} = 8r^2\pi$.

1332. 1° Stranice kvadrata su $a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, \dots$

Zbir obima

$$S = 4a + 2a\sqrt{2} + 2a + a\sqrt{2} + \dots = \frac{4a}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4a(2 + \sqrt{2}),$$

$$\text{a zbir površina } S = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \dots = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2.$$

$$2^0 1 = 16^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \Leftrightarrow n = 9,$$

1333. Količnik progresije je $q = a \frac{\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Primenom obrasca za konvergentni beskonačni geometrijski red dobija se

$$S = \frac{4a}{2 - \sqrt{2}} \text{ ili } 8 = \frac{4a}{2 - \sqrt{2}}, \text{ odatle } a = 2(2 - \sqrt{2}).$$

$$1334. \text{ Iz jednačine } \frac{1}{1 - \cos^2 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3}$$

sledi da je $\cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$. Traženi zbir je $S = 2$.

$$1335. \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{27a^2\sqrt{3}}{32} + \dots = 6a^2\sqrt{3};$$

$$\frac{3a^2\pi}{4} + \frac{9a^2\pi}{16} + \frac{27a^2\pi}{64} + \dots = 3a^2\pi.$$

$$1336. \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{64} + \dots = a^2\sqrt{3},$$

$$1337. a^3 + \frac{a^3\sqrt{3}}{9} + \frac{a^3}{\sqrt{27}} + \dots = \frac{3a^3(9 + \sqrt{3})}{26},$$

$$\frac{a^3\pi}{4} + \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{54} + \frac{a^3\pi}{162} + \dots = \frac{a^3\pi(9 + \sqrt{3})}{26},$$

$$\frac{a^3\pi}{6} + \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{54} + \frac{a^3\pi}{162} + \dots = \frac{a^3\pi(9 + \sqrt{3})}{52}.$$

1338. Poluprečnici krugova su

$$r_1 = \frac{a \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}, r_2 = \frac{a \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

$$r_3 = \frac{a \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^2 \dots$$

Zbir obima krugova je

$$O = \frac{2a\pi \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \left(1 + \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} + \dots \right) = a\pi \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\text{Zbir površina svih krugova je } P = \frac{a^2\pi \cos^2 \alpha}{4 \sin \alpha}.$$

1339. Pošto je dati red geometrijski, konvergentan je ako

$$|q| < 1, \text{ ovde je taj uslov ispunjen, tj. } \left| \frac{1}{7^x + 1} \right| < 1.$$

Zbir reda je 7 za $x = -1$.

$$1340. x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty \right); x = 6.$$

$$1341. x \in \left(\frac{1}{8}, 8 \right), x = \frac{1}{2}.$$

1342. Za $n = 1$, $K_1 = K \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K + \frac{Kp}{100}$ obrazac je tačan jer je interes za jednu godinu $\frac{Kp}{100}$.

Iz pretpostavke da obrazac važi za $n=k$ tj.

$$K_k = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^k \text{ treba dokazati da važi i za } n = k + 1$$

$$K_{k+1} = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{k+1}$$

Dokaz: Suma K_k naraste za godinu dana uz $p\%$ na vrednost

$$K_{k+1} = K_k + \frac{K_k p}{100} = K_k \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^k \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{k+1}$$

Obrazac je tačan za svako n prirodan broj.

1343. Pošto je $K = 500\,000$ din., $n = 2,5$ god., $q = 1 + \frac{6,5}{100} = 1,065$ tada je $K_{2,5} = 500\,000 \cdot 1,065^{2,5}$ ili
 $\log K_{2,5} = \log 500\,000 + 2,5 \log 1,065 = 5,69897 + 0,06837 = 5,76737$
 odakle je $K_{2,5} = 585\,250$ din.

1344. $K_n = 992\,240$ din, $n = 15$, $q = 1,05$ to je $K = \frac{K_n}{q^n} = \frac{992\,240}{1,05^{15}}$

logaritmovanjem dobijamo

$$\log K = \log 992\,240 - 15 \log 1,05 = 5,67877 \text{ odakle je } K = 477\,270 \text{ din.}$$

1345. U obrascu $K_n = Kq^n$ zamenom $K_n = 770\,960$, $K = 437\,400$ i $q = 1,065$ dobija se $770\,960 = 437\,400 \cdot 1,066^n$.

Preko logaritmovanja imamo $\log 770\,960 = \log 437\,400 + n \log 1,065$ odakle je n

$$n = \frac{\log 770\,960 - \log 437\,400}{\log 1,065} = \frac{0,24615}{0,02735} = 9.$$

1346. Zamenom datih vrednosti u obrascu $K_n = Kq^n$ dobijamo $466\,350 = 362\,500q^4$. Ako se logaritmuje

$$\log 466\,350 = \log 362\,500 + 4 \log q \text{ ili}$$

$$\log q = \frac{\log 466\,350 - \log 362\,500}{4} = 0,02735$$

Odakle je $q = 1,065$.

Iz jednačine $q = 1 + \frac{p}{100}$ sledi da je $p = 6,5\%$.

1347. U ovom slučaju je $k = 4\,000\,000$, $n = 10$, $p = 4$. Na kraju prve godine K se smanjuje za $\frac{Kp}{100}$ tako da ostaje

$$K_1 = K - K \frac{p}{100} = K \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

na kraju druge godine se K_1 smanjuje za $\frac{K_1 p}{100}$ i ostaje

$$K_2 = K_1 \left(1 - \frac{p}{100}\right) = K \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \text{ na kraju } n\text{-te godine dobija se}$$

$$K_n = K \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

Stoga je $K_{20} = 4\,000\,000 \cdot 0,96^{20} = 1\,767\,900$ din.

1348. U ovom slučaju imamo $2K = Kq^{2n}$ ili $2 = 1,035^{2n}$ odakle logaritmovanjem nalazimo $2n = \frac{\log 2}{\log 1,035} = 20,15$.

ili $n \approx 10$ godina i 27 dana.

1349. U ovom slučaju je $K = 297\,800$, $p = 5,5$, $n = 8$, te će primenom obrasca $K_n = Kq^n$, posle 8 godina broj stanovnika u tom gradu biti $K_n = 297\,800 \cdot 1,055^8 = 457\,000$.

1350. 204540 m^3 .

1351. 23 god. 13 dana.

1352. $p = 4,5\%$, $38\,000 \text{ m}^3$.

1353. 20 godina.

1354. $5,076\%$.

1355. $4,1528\%$.

1356. $5,2\%$.

1357. U ovom primeru je $K_n = Kq^n$, gde je $q = 1 - \frac{p}{110}$.

$$K_n = \frac{3}{5} K, n = 5, \text{ odakle je } p = 9,7\%.$$

1358. a) 121 550 din. b) 122 010 dinara.

1359. U ovom slučaju je

$$K_n = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, K'_n = K \left(1 + \frac{p}{200}\right)^{2n} \text{ odnos}$$

$$K_n : K'_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right) : \left(1 + \frac{p}{200}\right)^2.$$

Pokazuje da je za ulagača korisnije polugodišnje obračunavanje.

1360. U ovom primeru je

$$K_n = K \left(1 + \frac{p}{200}\right)^n \text{ i } K_n = K \left(1 + \frac{p'}{200}\right)^{2n} \text{ pošto je}$$

$$K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K \left(1 + \frac{p'}{200}\right)^{2n}$$

Izlazi da je $p' = 20 (\sqrt{100+p} - 10)$.

IX. GLAVA

9. KOMPLEKSNI BROJEVI

9.2. TRIGONOMETRIJSKI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

$$1361. R_e(z) = \frac{13}{10}, I_m(z) = \frac{19}{100}.$$

$$1362. R_e(z) = -\frac{24}{169}, I_m(z) = -\frac{10}{169}, |z| = \frac{2}{13}.$$

$$1363. f(3+2i) = 29 - 8i; f(3-2i) = 29 + 8i.$$

$$1364. f(2+3i) = 0, f(-2+i) = 0.$$

$$1365. \text{ Za } n=2 \text{ i } z = 1+i, z^2 + \bar{z}^2 = 0, z^2 - \bar{z}^2 = 4i;$$

$$\text{ Za } n=2 \text{ i } z = 2+i, z^2 + \bar{z}^2 = 6, z^2 - \bar{z}^2 = 8i;$$

$$\text{ Za } n=3 \text{ i } z = 1+i, z^2 + \bar{z}^3 = -4, z^3 + \bar{z}^3 = 4i \text{ itd.}$$

$$1366. \text{ a) } \frac{2}{3}i; \quad \text{ b) } -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

$$1367. \text{ Iskoristiti da je } z = x+iy \text{ a } w = a+bi.$$

$$1368. \text{ a) } z = 3-5i; \quad \text{ b) } z = 2+i.$$

$$1369. z = 1+0,5i.$$

$$1370. \text{ a) } z = 2+i; \quad \text{ b) } \bar{z} = 4+6i.$$

$$1371. \text{ a) } z = \frac{3}{4} + i; \quad \text{ b) } z = \frac{3}{2} - 2i.$$

$$1372. \text{ a) } z = 0, z = 1 \text{ i } z = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}); \quad \text{ b) } z = 0, z = \pm 1 \text{ i } z = \pm i.$$

$$1373. z = \pm(1+i).$$

$$1374. z = 3+4i.$$

$$1375. \text{ a) } z = -1-i; \quad \text{ b) } z = 1-i.$$

$$1376. z_1 = -1 \text{ ili } z_1 = -1-2i.$$

$$1377. z = -0,5(1+i).$$

$$1378. z = 6+17i \text{ ili } z = 6+8i.$$